КАЗАХСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

**С. Я. СЕРОВАЙСКИЙ**

"²àçàº óíèâåðñèòåòi"

АЛМАТЫ, 2000

УДК 517.9

ББК 22. 12я73

*Рекомендовано к изданию Ученым советом*

*механико-математического факультета  
КазГУ им. аль-Фараби*

Рецензент

доктор физико-математических наук,

профессор Ш. С. Смагулов

**С32 Серовайский С.Я.** Математическое моделирование.–

Алматы: ²àçàº óíèâåðñèòåòi, 2000. – 345 с.

ISBN 9965-408-51-3

Книга представляет собой курс лекций по математическому моделированию – удивительному научному направлению, связывающему Математику с окружающим миром. Исследование явлений природы и общества на основе математического моделирования предполагает формулировку законов, лежащих в основе изучаемого процесса, на языке математики, преобразование полученной информации с помощью математических методов и вычислительной техники и интерпретацию полученных результатов с позиций соответствующей предметной области. Мы рассмотрим основные принципы построения и анализа математических моделей для широкого класса задач физики, химии, биологии, экономики, социологии, политологии, психологии.

Книга может быть рекомендована для студентов различных специальностей в качестве учебного пособия по курсу "*математическое моделирование*", а также для всех, кто стремится понять место Математики в общей человеческой культуре и ее взаимоотношение с различными науками.

ББК 22. 12я73



ISBN 9965-408-51-3

© Серовайский С. Я., 2000

**СОДЕРЖАНИЕ**

ПРЕДИСЛОВИЕ 7

Лекция № 1 ВВЕДЕНИЕ 12

1. Познание и моделирование 12

2. Естествознание и математика 14

3. Содержание или форма ? 15

4. Коперник или Птолемей ? 20

5. Уравнение падения тела 22

6. Приниципы построения математической модели 28

7. Классификация математических моделей 31

Приложение 32

Комментарии 38

Лекция № 2 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ 40

1. Вывод уравнения колебания маятника 40

2. Решение уравнения колебания маятника 44

3. Энергия колебания маятника 46

4. Колебание маятника при наличии трения 48

Приложение 52

Лекция № 3 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ 60

1. Электрический контур 60

2. Энергия контура 65

3. Контур с сопротивлением 66

4. Вынужденные колебания контура 68

Приложение 72

Комментарии к лекциям 2 - 3 76

Лекция № 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 78

1. Эволюционные процессы и дифференциальные уравнения 78

2. Элементы теории динамических систем 80

3. Изменение численности вида при избытке пищи 83

4. Колебание маятника 84

5. Устойчивость положения равновесия 87

6. Предельный цикл 91

Приложение 94

Комментарии 96

Лекция № 5 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ХИМИИ 98

1. Уравнения химической кинетики 98

2. Мономолекурлярная реакция 104

3. Бимолекулярная реакция 106

4. Система Вольтерра-Лотки 109

Приложение 112

Комментарии 116

Лекция № 6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ 118

1. Эволюция одного вида 119

2. Модель "БИОЛОГИЧЕСКАЯ КОНКУРЕНЦИЯ" 125

3. Модель "ХИЩНИК - ЖЕРТВА" 130

Приложение 136

Комментарии 141

Лекция № 7 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ 143

1. РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ФИРМЫ 143

2. Модель "экономическая конкуренция" 145

3. Модель "экономическая ниша" 151

4. Модель "свободный рынок" 156

5. Модель "монополизированный рынок" 159

Приложение 161

Лекция № 8 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПОЛИТОЛОГИИ 168

1. Политическая конкуренция 169

2. Модель "политическая ниша" 171

3. Двухпартийная система 172

Лекция № 9 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СОЦИОЛОГИИ И ПСИХОЛОГИИ 180

1. Профсоюзная деятельность 180

2. Борьба за лидерство 182

3. Семейная история 186

4. Союзники 188

Приложение 189

Комментарии к лекциям 7 - 9 192

Лекция № 10 ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ 194

1. Вывод уравнения падения тел 194

2. Принцип наименьшего действия 198

3. Задача о брахистохроне 201

Лекция № 11 ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ 205

1. Управление и оптимизация 205

2. Постановка задачи оптимального управления 207

3. Максимизация дальности полета ракеты 210

4. Принцип максимума понтрягина 213

5. Идентификация математической модели 217

Приложение 220

Комментарии к лекциям 10 – 11 220

Лекция № 12 КОЛЕБАНИЕ СТРУНЫ 222

1. Вывод уравнения колебания струны 222

2. Постановка краевых задач 227

3. Энергия колебания струны 229

4. Задача Коши для уравнения колебания струны 231

5. Колебание струны с закрепленными концами 237

Приложение 240

Лекция № 13 УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ 242

1. Электрические колебания в проводах 243

2. Уравнение Эйлера 247

3. Уравнение неразрывности 252

4. Уравнения акустики 255

Приложение 257

Комментарии к лекциям 12 - 13 258

Лекция № 14 ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА 260

1. Уравнение теплопроводности 260

2. Постановка краевых задач 264

3. Первая краевая задача для однородного уравнения 265

4. Уравнение диффузии 267

5. Уравнение электропроводности 270

6. Вывод уравнений переноса 272

7. Обзор процессов переноса 274

Приложение 278

Комментарии 284

Лекция № 15 CТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ 286

1. Стационарный теплоперенос 286

2. Стационарное течение жидкости 287

3. Электростатическое поле 288

4. Постановка краевых задач 289

5. Сферические и цилиндрические координаты 292

6. Потенциал точечного заряда 294

7. Потенциал заряженного провода 296

Комментарии 298

Лекция № 16 КОРРЕКТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ 299

1. Задачи Коши для дифференциальных уравнений 300

2. Краевые задачи для дифференциальных уравнений 303

3. Уравнение теплопроводности 305

4. Пример Адамара 306

5. Задача Эйлера 308

6. Задача Бенара 310

Приложение 313

Комментарии 314

Лекция № 17 УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА 317

1. Задачи квантовой механики 317

2. Волновая функция 319

3. Вывод уравнения Шредингера 321

4. Движение частицы во внешнем поле 324

5. Потенциальный барьер 325

Комментарии 330

ЛИТЕРАТУРА 333

# ПРЕДИСЛОВИЕ

*Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики.*

Иоганн КЕПЛЕР

Математика занимает особое место в человеческой культуре. Она радикально отличается от физики, биологии, истории, психологии и других наук. Имея своим предметом абстрактные понятия типа числа и функции, уравнения и множества, отсутствующие в реальном мире и являющиеся странным продуктом человеческого мозга, она, тем не менее, оказывается удивительно приспособленной для постижения любых явлений природы и общества. Поразительная применимость математики для анализа всевозможных событий окружающего мира обусловлена наличием удивительного связующего звена между объективной реальностью и сухой абстракцией математических конструкций. Существует некий волшебный мост, позволяющий загадочным образом перенестись из привычного реального мира в фантастическую страну Математику и вернуться обратно после увлекательного путешествия по ее бескрайним просторам с накопленным багажом знаний. Этим загадочным мостом служит математическое моделирование – специфическая форма познания окружающего мира, способная перевести законы природы, изучаемые отдельными науками, на математический язык; увидеть за сухими математическими формулами события реальной жизни.

Предметом данной книги и является математическое моделирование. Автор не ставил перед собой целью ни обучение читателя отдельным законам природы и общества, ни его знакомство с математическими методами решения прикладных задач. Наша цель – научится возводить мосты между математикой и окружающим миром. Мы хотим показать, что совершенно разные явления природы могут быть описаны математически на основе одних и тех же приемов. И здесь в удивительно равном положении оказываются и строгая механика, насквозь пропитанная математическими идеями, и зыбкая психология, казалось бы, не очень поддающаяся формализации. Выбор объектов моделирования остается целиком и полностью на совести автора. Широта охвата материала обусловила невысокую глубину его проработки с позиций как математики, так и специальных наук. Существуют многотомные солидные труды, посвященные применению математических методов для анализа процессов, относящихся исключительно к сфере деятельности той или иной конкретной науке, а то и ее небольшому разделу. Если кто-либо из серьезных читателей интересуется исключительно математической экономикой или математической экологией (не говоря уже о математической физике), то ему рекомендуется не тратить своё бесценное время на изучение сего скромного произведения, а обратиться к соответствующей литературе. Некоторая информация о более солидных литературных источниках в том или ином направлении приводится в комментариях к приводимым ниже лекциям.

Для понимания излагаемого материала от читателя не требуется особо глубоких познаний в области математики и частных наук. Среди наших читателей очень хотелось бы видеть студентов, аспирантов и молодых специалистов различных специальностей, а, возможно, и учащихся старших классов школ, интересующихся применением математических методов и вычислительной техники для решения задач широкого профиля, имеющих вкус к исследовательской работе и испытывающих любовь и уважение к математике, но не желающих полностью замыкаться на математических абстракциях.

Книга написана на основе лекций по курсу "*Математические модели естествознания*", читаемого автором в течение многих лет на механико-математическом факультете Казахского государственного национального университета им. аль-Фараби. С этим курсом связаны обучающие программные комплексы "*Математические модели естествознания*" и "*Компьютерные модели в общественных науках*", разработанные автором совместно с сотрудниками университетской лаборатории компьютерного моделирования. Указанные программные продукты предназначены для проведения лабораторных работ и компьютерной поддержке лекций по данному курсу. Если читатель пожелает приобрести данную книгу в комплекте с соответствующим программным обеспечением, то он получит уникальную возможность оживить сухое изложение материала и самостоятельно проводить компьютерный эксперимент в соответствии с имеющимися методическими указаниями. С упомянутыми компьютерными средствами обучения и последующими разработками в данном направлении можно познакомиться на механико-математическом факультете КазГУ им. аль-Фараби.

Автор хотел бы выразить свою благодарность

* рецензенту книги профессору Ш. С. Смагулову, а также преподавателям и сотрудникам КазГУ им. аль-Фараби П. Г. Ицковой, А. К. Каримову, В. В. Кашкарову, Н. А. Лысковской – за полезные советы и замечания по отдельным разделам книги;
* сотрудникам лаборатории компьютерного моделирования и студентам механико-математического факультета КазГУ   
  Р. Абдуллину, Ж. Я. Аскаровой, А. А. Берлизеву, А. Р. Гаврилову, Т. Ю. Кабировой, А. Красовицкому, Н. А. Лысковской,   
  Н. Н. Мясникову, Н. В. Поповой, Е. В. Попову, В. И. Щербаку – за разработку компьютерных средств обучения, связанных с данным курсом;
* сотрудникам лаборатории компьютерного моделирования   
  Ю. И. Дзибалову, Т. Ю. Кабировой, В. И. Щербаку – за помощь при подготовке книги к печати.

*Истинный математик – всегда поэт.*

Карл ВЕЙЕРШТРАСС

**КОЕ-ЧТО О МОДЕЛИРОВАНИИ**

*Путь наш во мраке лежит.*

*Истина скрыта от нас...*

*Как-то лихие мужи*

*Встретили в поле слона.*

*Мудрые старцы с тех пор*

*Спорят до наших времен...*

*И не кончается спор -*

*Кем же он был, этот слон.*

*Первый воскликнул*: *"Друзья!*

*Ужас сковал мою грудь!*

*Слон - это злая змея,*

*Что преградила мне путь".*

*"Ты же не видел слона!*

*Что же ты хнычешь, герой?*

*Слон - то большая стена"*, *-*

*Молвил мыслитель второй.*

*"Я вам скажу без обид -*

*Вас, мудрецы, не поймешь, -*

*Третий из них говорит, -*

*Слон - на колонну похож".*

*Молвил четвертый: "О нет!*

*К вашим рассказам я глух!*

*Я приоткрою секрет:*

*Слон - исполинский лопух!"*

*"Истину вам не понять!*

*Что же ты выдумал, брат, -*

*Крикнул мудрец номер пять, -*

*Слон - это гибкий канат".*

*"Я помираю с тоски.*

*С вами, друзья, пропадешь.*

*Все вы, клянусь, дураки!*

*Слон - он же острый как нож".*

*Правда раскрыться должна*

*Людям*, *в конце-то концов...*

*Встретили в поле слона*

*Шестеро мудрых слепцов.*

*Славно ведется игра.*

*Всеми достигнута цель.*

*Каждый по-своему прав.*

*Каждый построил модель.*

*Честно признать мы должны -*

*Мысли не столь уж плохи.*

*Есть кое-что от стены.*

*Уши - и впрямь лопухи.*

*Как же тут правде не быть?*

*Я вам скажу не тая:*

*Ноги - ну точно столбы*,

*Хобот - понятно*, *змея.*

*Лучше не будет игры.*

*Хвост*, *он похож на канат.*

*Бивни*, *как сабли*, *остры...*

*Вы-то видали слона?*

*- Мы не видали слона?*

*Надо ж такое сказать!*

*Истина ясно видна.*

*Наши раскрыты глаза!*

*Ты не согласен? Но ты*

*Тоже нарвешься на мель...*

*Все мы - слепые кроты*,

*Если мы строим модель.*

*Путь наш во мраке*, *увы.*

*Истина скрыта от нас...*

*Может быть*, *встретите вы*

*Где-нибудь в поле слона...*

*Я вам скажу не в укор*: *Мир - это сказочный сон*,

*Где не кончается спор*,

*Кем же он был*, *этот слон...*

# Лекция № 1 ВВЕДЕНИЕ

*Философия* *природы написана в величайшей книге, которая всегда   
открыта перед нашими глазами, – я   
разумею Вселенную, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески ее слова; без них – тщетное кружение в темном лабиринте.*

Галилео ГАЛИЛЕЙ

В первой лекции нашего курса мы попытаемся взглянуть на математическое моделирование как на специфическую форму познания окружающего мира. Любое представление исследователя об изучаемом объекте и является его моделью. Нас будут интересовать исключительно модели, сформулированные на математическом языке. Именно они служат связующим звеном между абстрактной Математикой и окружающим нас миром.

Мы попытаемся выявить некоторые особенности математического моделирования и разобраться в общих принципах построения моделей. В качестве примера рассматривается классическая задача о падении тела под действием собственного веса. В приложении приводятся ряд достаточно простых, но далеко не тривиальных математических моделей движения тела в поле силы тяготения.

## 1. ПОЗНАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В основе данного курса лежит понятие *математической   
модели* – поразительной формы представления всевозможных явлений, протекающих в природе и обществе. Само по себе моделирование предполагает активное взаимодействие Человека с окружающим миром и неизбежно выводит нас к общей проблеме *познания*. Процесс познания непременно обусловлен наличием объекта познания, т.е. предмета исследования и исследователя – познающего субъекта.

Исследователь изучает интересующий его объект, наблюдает за ходом развития событий, а возможно, и активно вмешивается в них, задавая те или иные вопросы и получая на них соответствующие ответы. Установив некоторую информацию о предмете исследования, субъект формирует своё представление об интересующим его объекте, своё видение изучаемого явления. Это представление, основанное на имеющейся объективной информации о предмете познания и отражающее субъективную точку зрения исследователя, и будет *моделью* изучаемого объекта (см. рис. 1). Таким образом, процесс познания, фактически сводящийся к сбору, хранению и переработке всевозможной *информации*, является в то же самое время и процессом моделирования. По-видимому, для нас и нет особо острой необходимости различать эти два, на первый взгляд, совершенно разных термина.



Рис. 1. Упрощенная схема процесса познания.

Существуют различные типы познания окружающего мира, различные способы восприятия нами действительности. Сюда относятся наука, философия, религия, литература, искусство... Казалось бы, что между ними может быть общего? Ученый настойчиво изучает строение атома и возникновение крепостного права. Философ упорно пытается постигнуть смысл Бытия и место Человека в этом удивительном мире. Религиозный мыслитель напряженно ищет проявление Вечного в Человеке и сосредоточенно размышляет над откровением Божьим. Писатель сочиняет крутой детективный роман или высокую трагедию. Художник изображает закат у моря и рисует портрет возлюбленной. Композитор пишет героическую симфонию, легкомысленный шлягер или похоронный марш...

Каждый из них по-своему воспринимает действительность и пытается имеющимися средствами выразить собственное видение окружающего мира. Все они вольно или невольно занимаются исключительно моделированием, а их профессиональная деятельность неизменно сводится к переработке некоторой информации. Наблюдаемые различия определяются лишь выбором предмета исследования и формы представления. Проблемы, непосредственно стоящие перед нами в данном курсе, относятся лишь к одной из форм мировосприятия, к одному из многих типов моделирования.

## 2. ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ И МАТЕМАТИКА

Нас, конечно же, будет интересовать исключительно научное познание всевозможных объектов с помощью математических методов. В связи с этим было бы неплохо для начала попытаться в какой-то степени понять суть Математики и ее взаимоотношения с другими науками.

Физика и химия, биология и психология, социология и археология имеют конкретные более или менее четко выраженные области приложения. Лазерное излучение и синтез ацетилена, строение клетки и принцип частной собственности, эрозия почвы и закат Римской империи связаны с реальными и вполне осязаемыми объектами. Их можно и должно изучать, поскольку за ними стоит окружающий мир, воспринимаемый нашими органами чувств. Математики же, напротив, имеют дело исключительно с абстрактными понятиями – числом, функцией, множеством, операцией и т.п., которые сами по себе в природе не существуют, а являются лишь своеобразными продуктами человеческого мозга. Если предметом обычных добропорядочных наук является объективно существующая реальность, то Математика оперирует исключительно с идеальным миром человеческих идей.

Каждая из нормальных наук имеет сравнительно четкие границы, отделяющих ее от всего прочего. Физик, оставаясь чистым физиком, не способен изучать соотношения между различными формами собственности. Историку не дано исследовать ход химических реакций. Ботаник не в состоянии применить свои профессиональные навыки для анализа римского права. В то же время уважающий себя математик не останавливается перед любыми преградами и не терпит границ, искусственно разделяющих различные научные дисциплины. Оставаясь по своей сути чистым математиком, он способен смело вторгаться в любую форму человеческой деятельности и добиваться ощутимых успехов. Вот и получается, что Математика каким-то непостижимым способом умудряется изучать всё и в то же время ничего конкретно… Имеем ли право после всего этого считать, что к Математике термин "наука" применим в той же степени, что и к физике, социологии или географии? Не логичнее ли предположить, что мы имеем дело с какой-то иной формой мировосприятия?

Возникает естественный вопрос, *как же можно объяснить грандиозные успехи абстрактных математических методов при решении конкретных прикладных задач*? Почему, безусловно, отсутствующие в окружающем мире числа и функции, уравнения и операторы позволяют осторожно приоткрыть тайны движения планет, взаимодействия химических элементов, передачи генетической информации, механизма ценообразования на свободном рынке? Как, несомненно, абстрактное Ничто превращается во вполне осязаемое конкретное Нечто?

Между Математикой и окружающей нас действительностью непременно должно существовать какое-то связующее звено – специфический тип модели, с одной стороны, способной содержать богатейшую информацию о том или ином предмете исследования, а с другой стороны, сформулированной с помощью стандартных математических понятий и, стало быть, пригодной для применения мощного математического аппарата. Это и есть математическая модель исследуемого явления, служащая своего рода переводом закономерностей, выявленных конкретной наукой, на строгий математический язык. *Математическое моделирование оказывается грандиозным мостом*,объединяющим два принципиально разных мира – окружающую объективную действительность, воспринимаемую нашими органами чувств и изучаемую средствами отдельных наук, и абстрактный мир человеческих идей, где властвуют математические законы.

Наша задача как раз и состоит в том, чтобы в какой-то степени оценить особенности математического моделирования различных процессов, познакомиться с принципами их построения и методами их исследования, а значит, научиться возводить мосты между мирами.

## 3. СОДЕРЖАНИЕ ИЛИ ФОРМА ?

Обсуждая то или иное произведение литературы и искусства, мы пытаемся оценить как его содержание, так и форму. Когда мы говорим о *содержании*, то нас интересует непосредственно сюжет данного произведения, те конкретные цели, которые преследовал его творец, те мысли, которые он сознательно вложил в свой труд. *Форма* же скорее характеризует средства, при помощи которых автор воплотил в жизнь свои сокровенные мысли. Если содержание несет, прежде всего, объективную информацию о рассматриваемом предмете или явлении, то форма в значительной степени соответствует личным вкусам автора, а потому оказывается глубоко субъективной.

На первый взгляд, кажется вполне естественным, что цель, идея, мысль предшествуют форме, т.е. средству, что субъективный взгляд исследователя не должен заслонять истинную природу изучаемого явления. Однако почему-то о подлинном искусстве и литературе можно говорить с полным основанием лишь тогда, когда форма произведения, по меньшей мере, адекватна его содержанию, когда применяемые средства оказываются достойными выбранной цели.

Любой нормальный человек способен более или менее внятно рассказать о том или ином конкретном эпизоде своей жизни, охарактеризовать кого-либо из своих близких знакомых, поделиться собственными впечатлениями о каком-нибудь известном событии. Но получим ли мы в результате настоящее произведение искусства? Подобный рассказ при всей его возможной содержательности заинтересует, по-видимому, лишь весьма узкий круг людей, имеющих непосредственное личное отношение к этому вполне заурядному делу. Но вот поэт зачем-то придает своему повествованию неповторимый стихотворный размер, снабжает его неожиданными рифмами, богатыми метафорами, казалось бы, не несущими никакой четкой смысловой нагрузки, не только не проясняющими, но подчас, и затемняющими непосредственный сюжет произведения... Вот композитор передает свои впечатления посредством гармонии звуков, не очень понятных с информационной точки зрения... А в результате мы встречаемся с Искусством, которое переживет своего творца и будет волновать многие поколения совершенно разных людей, бесконечно далеких от проблем, волновавших когда-то автора. И у каждого культурного человека эти божественные творения вызывают свои индивидуальные ассоциации...

Так действительно ли при построении модели рассматриваемого явления следует добиваться исключительно высокой точности воспроизведения информации? Разве серьезный писатель, рассказывающий о заинтересовавшем его событии, воспроизводит именно то, что происходило на самом деле? Разве настоящий художник, пишущий картину, заботится главным образом о ее максимальной близости имеющемуся оригиналу? По словам Огюста Родена, "*художник*, *который довольствуется точным изображением действительности и рабски воспроизводит даже самые незначительные детали*, *никогда не станет   
настоящим мастером*". И в то же время портрет кисти талантливого живописца почему-то говорит о внутреннем мире человека гораздо больше, чем самая четкая фотография. А рассказ талантливого писателя производит несравненно более глубокое впечатление, чем точнейший отчет строгого судебного эксперта высшей квалификации. Эти призрачные туманные формы почему-то неизменно оказываются в конечном итоге удивительно информативными...

А теперь зададимся вопросом о соотношении между содержанием и формой в научном исследовании и, в частности, при математическом моделировании. Коль скоро целью любого моделирования является воспроизведение информации о рассматриваемом объекте, то мы, по-видимому, должны уделять основное внимание содержательности модели, считая ее форму делом второстепенным. А уж от математической модели мы вправе ожидать максимальной объективности и адекватности. Считая допустимым, а подчас, и необходимым, определенное отступление от точности воспроизведения информации в литературе, искусстве, религии, мы, как будто бы должны требовать максимальной точности от Науки, а тем более, от Математики. Ведь именно здесь мы в праве ожидать предельно четких и убедительных ответов на все корректно поставленные вопросы...

Но столь ли уж высока благонадежность Науки? Отметим, прежде всего, что это лишь одна из многих форм познания окружающего мира. Умей она давать исчерпывающие ответы на все волнующие нас вопросы, едва ли кому-либо пришло в голову обращаться к религии или искусству. К сожалению (или к счастью?), возможности Науки весьма ограниченны. Действительно, что есть первопричина всего существующего? Почему и как возникла жизнь? Что такое разум и почему мы им наделены? Эти важнейшие проблемы, неизменно стоящие перед человечеством, увы, оказываются далеко за пределами Науки.

Но не будем сейчас задавать вечные вопросы и обратимся к простым будничным явлениям, которые, вне всякого сомнения, можно и должно изучать научными методами, причем желательно с активным привлечением математического аппарата. Рассмотрим заурядный процесс движение некоторого тела в пространстве. Задача физики (точнее, механики) состоит в том, чтобы четко и ясно указать, где находится данное тело в тот или иной конкретный момент времени и с какой скоростью оно движется…

Однако, как это ни печально, в современной физике вопрос о том, что происходит в действительности в каждом конкретном случае, может быть лишен четкого смысла. Которое из двух событий на самом деле произошло раньше? Где конкретно находится отдельно взятый электрон в данный момент времени и какой он имеет при этом импульс? Согласно специальной теории относительности, первый вопрос следует в принципе считать не корректным без указания рассматриваемой системы отсчета (а выбор конкретной системы отсчета – личное дело исследователя). Квантовая механика накладывает принципиальный запрет на возможность полного и окончательного ответа на второй вопрос.

А можно ли точно установить траекторию движения конкретной единичной молекулы в потоке жидкости? Да и есть ли в этом острая необходимость? Стоит ли добиваться абсолютного соответствия между результатами натурного эксперимента и предлагаемой нами моделью, если самая надежная аппаратура неизбежно производит измерения с некоторой погрешностью? На результаты производимого опыта могут существенным образом сказаться и высокая солнечная активность, и стоящий невдалеке кондиционер, и проехавший в данный момент по улице большегрузный самосвал, и недостаточно чисто вымытая лабораторная пробирка, и семейные неприятности у экспериментатора. *Так следует ли в серьезных научных исследованиях озвучивать каждый случайный шум*?

На любой процесс в той или иной степени неизменно оказывают влияние различного рода случайные факторы, которые зачастую не только невозможно, но и вообще не нужно учитывать. Задача исследователя – понять суть изучаемого явления, а не отображать всевозможные помехи. Точно также писатель или художник свободно отходят от оригинала, смело отбрасывают второстепенные, по их мнению, детали и воспроизводят изучаемый объект так, как считают нужным. Так столь ли уж велика разница между строгой Наукой и вольным Искусством?

Что же касается якобы безгрешной Математики с ее гордой претензией на абсолютную достоверность и объективность, то, как это ни горько будет сознавать, базируется она на весьма шатком фундаменте. Уж он-то не только не является, но и в принципе не может служить эталоном абсолютной точности и достоверности. Казалось бы, заведомо тривиальны свойства коммутативности и ассоциативности умножения. Но, переходя от чисел к матрицам, мы почему-то теряем коммутативность, а для обобщенных функций возможно нарушение ассоциативности умножения. Казалось бы, аксиоматика евклидовой геометрии абсолютно безупречна и проверена многими поколениями математиков. Но вот мы рискнули заменить одну аксиому другой, и все величественное здание вопреки ожиданиям вовсе не рухнуло, а приняло иной, совершенно неожиданный, но вполне строгий вид. Предельно конкретный вопрос о том, сколько прямых, параллельных данной, проходит через точку, взятую вне прямой, никак не может иметь четкого однозначного ответа без указания выбранной системы аксиом. При этом каждый исследователь в праве выбрать ту аксиоматику, которая ему больше нравится, лишь бы она оказалась непротиворечивой и давала внятный ответ на конкретно поставленный вопрос... Здесь проглядывается несомненная аналогия с выбором системы отсчета в релятивистской физики. А стоит ли этому удивляться – *Математика такова*, *каков описываемый ею реальный мир*. О какой уж объективности здесь может идти речь, если принципиальный результат существенным образом зависит от воли исследователя?

А чего стоят знаменитые парадоксы теории множеств, если едва не каждый уважающий себя математик предлагал свой, единственно верный, по его мнению, способ выхода из той глубокой трясины, в которой крепко завязла всемогущая Математика. А весь математический мир раскололся при этом на множество смертельно враждующих между собой научных школ, как будто речь идет не о добропорядочных служителей строгой науки, а об упрямых философах Древней Греции или Китая.

Так верна или нет, в конце концов, континуум-гипотеза Кантора? Надо ли включать в число первооснов теории множеств аксиому выбора? Наконец, существует еще легендарная теорема Геделя, которая окончательно ставит крест на попытках создания достаточно содержательной полной непротиворечивой математической теории. Не грех вспомнить здесь и теорему Тарского, согласно которой понятие истинности в той или иной конкретной формализованной теории никак не может быть охарактеризовано средствами самой этой теории... А еще есть любопытная теорема Левенгейма – Сколема, в соответствии с которой, грубо говоря, любая теория, призванная описать некоторый заранее фиксированный круг понятий, непременно будет описывать и объекты, лежащие за пределами указанного круга.

Однако не будем забираться в дремучие беспросветные дебри туманных оснований Математики. В данном случае нас интересует предельно конкретный вопрос – *всегда ли адекватность является важнейшим требованием*, *предъявляемым к математической модели*? Действительно ли содержание оказывается решающим фактором в процессе математического моделирования, а форма есть нечто вспомогательное и второстепенное?

## 4. КОПЕРНИК ИЛИ ПТОЛЕМЕЙ ?

Попробуем понять, в чем состоит принципиальное различие между космологическими теориями Коперника и Птолемея? Почему в этом долгом напряженном споре взял верх именно Коперник?

Казалось бы, ну что тут, собственно, долго думать... Сразу напрашивается естественный ответ – умница Коперник верно описал строение Солнечной системы, а бедняга Птолемей серьезно заблуждался. И вот после отдельных временных недоразумений, в конце концов, восторжествовала справедливость...

К сожалению, мы не сможем удовлетвориться столь очевидным, на первый взгляд, ответом. Действительно, обе рассматриваемые теории на самом деле являются всего лишь моделями Солнечной системы. А модель – это никак не объективная реальность, а некоторое представление конкретного исследователя об изучаемом объекте. Таким образом, система Коперника не может быть признана абсолютно верной. Она всего лишь более или менее сносно описывает движение планет вокруг Солнца. Имеем ли мы право приписывать ей абсолютную непогрешимость? Вспомним хотя бы о том, что, по мнению Коперника, Солнце есть центр мироздания, а планеты движутся вокруг него по круговым орбитам, что как будто не очень соответствует действительности...

С другой стороны, столь ли уж плох был этот Птолемей с его "нехорошей" геоцентрической системой? Отдаем ли мы себе отчет в том, что Клавдий Птолемей по праву относится к числу крупнейших математиков, астрономов и географов древности? Он был одним из создателей тригонометрии. За полторы тысячи лет до Ферма, Декарта и Эйлера он рассуждал о трех измерениях пространства. Едва ли ни первым усомнился в очевидности пятого постулата Евклида. Был изобретателем астролябии. И, пожалуй, его место в истории мировой культуры никак не менее почетно, чем место Николая Коперника. Отметим также, что среди предшественников Птолемея в разработке геоцентрической системы были столь блистательные мыслители, как Гиппарх и Евдокс. И если бы система Птолемея была так уж безнадежна, то неужели же ею пользовались бы лучшие астрономы всего мира на протяжении полутора тысяч лет?

Попытаемся уточнить наш ответ. По-видимому, обе рассматриваемые теории в некоторой степени описывают исследуемый круг явлений. Долгое время астрономы довольствовались относительно грубой моделью Птолемея, пока на смену ей не пришла более совершенная теория. Система Коперника, конечно же, оказалась существенно более точной, чем и объясняются ее неоспоримые успехи...

Однако и этот, казалось бы, совершенно безупречный ответ, к сожалению, не в полной степени соответствует действительности. На самом же деле теория Птолемея практически не уступает системе Коперника в точности описания движения планет или затмения Солнца и Луны. К моменту появления гелиоцентрической системы астрономия фактически не знала явлений, которые описывались ею с большей степенью точности, чем геоцентрическая система Птолемея. И, несмотря на это, полная и безоговорочная победа Коперника оказалась неизбежна. Почему?

Как мы уже отмечали, моделирование неизменно сводится к сбору, хранению и переработке информации. Следовательно, из двух моделей одного и того же объекта предпочтительнее окажется та, которая осуществляет преобразование информации наиболее эффективно. Для описания конкретного объекта мы без особых хлопот можем предложить любую абстрактную математическую формулу. А затем с помощью многочисленных изощренных поправок добиться сколь угодно высокой точности предсказания изучаемого единичного явления. Но получаем ли мы право признать установленную в результате подобных сомнительных ухищрений математическую модель вполне удовлетворительной?

Да, модель Птолемея сравнительно прилично описывает движение планет Солнечной системы. Но достигается столь высокая точность исключительно за счет применения чрезвычайно громоздкой, неудобной и явно надуманной теории эпициклов. Система же Коперника (особенно после ее усовершенствования Кеплером), добиваясь такой же степени точности, оказывается существенно более простой, удобной и красивой. Любопытно, что приговор системе Птолемея фактически вынес сам ее автор, которому принадлежит глубочайшая мысль о том, что астрономия должна стремиться к возможно более простой математической модели. Только ли астрономия?

Итак, космологические теории Коперника и Птолемея, по крайней мере, на определенном этапе развития науки, практически не уступали друг другу в смысле точности описания изучаемых явлений, т.е. оказывались более или менее равноценными в смысле заключенного в них содержания. Неминуемая победа Коперника была обусловлена именно выбором более совершенной формы. Его модель отличается значительно большей изящностью и с эстетической точки зрения оказывается намного предпочтительнее. Геоцентрическая система на ранней стадии своего развития также была достаточно простой и красивой (в центре Вселенной расположена Земля, вокруг которой по круговым орбитам вращаются Солнце, Луна и планеты), но, к сожалению, оказалась не столь уж точной. По мере ее уточнения за счет введения дополнительных искусственных конструкций модель постепенно утратила свою эстетическую привлекательность. Поэтому, стоило появиться не менее точной, но более изящной и эффективной системы Коперника, как стало ясно, что будущее – за последней.

В результате мы вновь возвращаемся к рассуждениям о соотношении между формой и содержанием в научных исследованиях. Да, содержание научной теории, информативность математической модели является чрезвычайно важным фактором. Но подлинное произведение Науки мы получим лишь в том непременном случае, когда ее содержание выражено посредством достаточно совершенной формы. Со времен Пифагора гармония в науке считается не менее важным требованием, чем в живописи и поэзии, музыке и религии. Мир устроен так, что *более совершенная с эстетической точки зрения математическая модель почему-то всякий раз оказывается и более эффективной*. И уж если хорошенько вдуматься, то можно прийти к любопытной мысли о том, что задача Математики состоит как раз в изучении форм, а уж наделение этой формы конкретным содержанием остается в ведении специальных наук. Собственно, о чем-то подобном высказывался в свое время еще Платон... А уж он-то хорошо знал, что говорил…

## 5. УРАВНЕНИЕ ПАДЕНИЯ ТЕЛА

После затянувшихся общих рассуждений пора бы уж, наконец, обратиться к чему-то несколько более конкретному... По-видимому, первая в истории математическая модель, в должной степени отвечающая всем современным научным требованиям, связана с именем Галилея и характеризует процесс падения тел под действием собственного веса. Хорошо известно, что тело, поднятое над землей и предоставленное само себе, почему-то непременно упадет на землю. Попытаемся описать этот процесс математически.

Прежде всего, зададимся естественным вопросом, что же конкретно меняется в процессе падения данного тела? Если хорошенько подумать (а лучше – поэкспериментировать), то можно сообразить (а еще лучше – увидеть), что при падении тела со *временем* будет изменяться его *высота* над землей. Таким образом, исследуемый процесс можно попытаться описать с помощью *функции* *у = у*(*t*), характеризующей высоту тела в произвольный момент времени *t*. Вот если мы действительно сможем определить эту функциональную зависимость и предугадать тем самым с достаточной степенью точности закон изменения со временем положения тела в пространстве, то у нас будут серьезные основания считать решенной стоящую перед нами важную практическую задачу.

Итак, движение тела непременно сопровождается изменением его высоты. Естественно задаться вопросом, насколько быстро будет меняться рассматриваемая величина. Таким образом, для нахождения искомой функции *у* можно оценить скорость ее изменения. С математической точки зрения скорость изменения функции *у* в точке *t*  представляет собой ее *производную* в этой точке. В механике эту любопытную величину принято называть *скоростью* и обозначать через *v*.

Если скорость движения тела *v* нам известна, то для нахождения функции *у = у*(*t*) мы получаем чрезвычайно серьезное соотношение

. (1.1)

Математики называют задачу (1.1) *дифференциальным уравнением*, поскольку в него входит производная от искомой функции *у*.Таким образом, как будто, завершен первый этап нашего исследования. Полученное уравнение (1.1), как нам кажется, должно бы описывать исследуемый процесс, будучи его математической моделью.

Второй этап исследования предполагает извлечение математическими средствами информации, содержащейся в полученной модели в скрытой форме. Нам известна связь между искомой функции *у* и известной величиной *v*, выраженная посредством уравнения (1.1). Для нахождения неизвестной функциональной зависимости нам предстоит решить полученное уравнение, т.е. преобразовать информацию, содержащуюся в математической модели. Если скорость тела со временем не меняется, то равенству (1.1) будет удовлетворять любая функция вида

*у*(*t*) *= v t + с* , (1.2)

где *с* – произвольная постоянная. При этом говорят, что равенство (1.2) дает *общее решение*уравнения (1.1). Это означает, что все решения уравнения (1.1) и только они имеют указанный вид.

На третьем этапе исследования мы попытаемся интерпретировать полученный результат с позиций данной предметной области. Прежде всего, нам предстоит выяснить, действительно ли построенная нами модель в должной степени описывает рассматриваемое явление. Для этого следует сравнить результаты анализа математической модели с экспериментом.

Неоднозначность найденного решения сразу же наводит на мысль о том, что имеющейся в нашем распоряжении информации о процессе пока еще не достаточно для его полного описания. Следовательно, предложенная нами математическая модель нуждается в серьезном уточнении. Это означает, что нам предстоит вернуться к первому этапу и попытаться восполнить имеющийся пробел в понимании изучаемого процесса.

Очевидно, положение тела, движущегося с данной скоростью, будет существенно зависеть от того, где конкретно находилось тело в некоторый начальный момент времени *t*0 . Предположим, что при   
*t = t*0 тело имеет начальную высоту *у*0, т.е. справедливо равенство

*у*(*t*0) *= у*0 , (1.3)

называемое *начальным условием*. Уточненная математическая модель характеризуется соотношениями (1.1), (1.3), составляющими в совокупности *задачу Коши* для рассматриваемого уравнения. Теперь уже у нас появилась возможность определить *частное решение* уравнения (1.1), которое удовлетворяет начальному условию (1.3). Для этого полагаем в формуле (1.2) *t = t*0 . В результате получаем значение

*у*(*t*0) *= v t*0 *+ с = у*0 .

Отсюда находим константу *с = у*0– *v t*0. Тогда решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.3) имеет окончательный вид

*у*(*t*) *= у*0 *+ v* (*t* – *t*0) . (1.4)

Мы вновь обращаемся к интерпретации полученных результатов и… сталкиваемся с явным несоответствием расчетной высоты падающего тела с ее величиной, наблюдаемой экспериментально. Сей прискорбный факт свидетельствует об имеющейся серьезной неточности в сделанных нами предположениях. Действительно, простейший эксперимент показывает, что вопреки принятой нами гипотезе в процессе падения скорость тела существенно меняется. Уточняя модель, приходим к той же задаче Коши, но уже с переменной величиной *v*.

Интегрируя соотношение (1.1) от *t*0 до некоторого значения *t* и учитывая начальное условие (1.3), находим следующий закон изменения высоты тела над землей

 . (1.5)

В случае постоянства скорости эта формула принимает уже известный вид (1.4).

Теперь нам вновь следовало бы сравнить найденную функциональную зависимость с результатами наблюдений. Однако, к сожалению, такой возможности у нас в действительности нет, поскольку закон изменения скорости тела нам явно не известен. Тем самым выясняется, что исследуемый процесс характеризуется не только координатой, но и скоростью падающего тела. Мы вновь убеждаемся в необходимости включения в математическую модель некоторой дополнительной информации.

Попытаемся оценить, как быстро меняется скорость падающего тела. Скорость изменения функции *v*, т.е. ее производная  (или вторая производная от координаты ) в механике называется *ускорением* и обозначается через *а*. В результате для нахождения скорости мы получаем еще одно дифференциальное уравнение

. (1.6)

Это соотношение с математической точки зрения аналогично уравнению (1.1) и также требует задания начального условия. Мы можем предположить, например, что в момент времени *t = t*0 тело только начинает движение, а значит, имеет нулевую скорость (мы подняли тело над землей и зачем-то его отпустили). Таким образом, справедливо равенство

*v*(*t*0) *=* 0 . (1.7)

На очередной стадии процесса моделирования получается система дифференциальных уравнений (1.1), (1.6) с начальными условиями (1.3) и (1.7).

Задача Коши (1.6), (1.7) допускает единственное решение, аналогичное функциям *у*, определяемым по формулам (1.4) или (1.5) в зависимости от того, будет ли ускорение *а* постоянным или переменным. Так или иначе, мы можем установить закон изменения скорости падающего тела при непременном условии, что его ускорение уже откуда-то известно. Это обстоятельство наводит на весьма нехорошие мысли...

Определение высоты тела сводится к нахождению его производной, т.е. скорости. Для вычисления скорости требуется найти уже ее производную, т.е. ускорение. Было бы уж очень печально, если бы оказалось, что теперь нам еще придется искать производную от ускорения, далее – производную от этой производной и т.д. К счастью, весьма надежный эксперимент показывает, что ускорение падающего тела по какой-то совершенно не понятной причине с достаточно большой степенью точности со временем не меняется и даже не зависит от специфических особенностей рассматриваемого тела, являясь универсальной физической постоянной. Этот поразительный факт позволяет нам, в конце концов, завершить проводимое исследование и добиться долгожданного результата.

Отметим, что в процессе движения высота падающего тела уменьшается, что в соответствии с соотношением (1.1) возможно исключительно в случае отрицательности скорости *v*. Некая функция *v*, равная нулю в начальный момент времени и изменяющаяся с постоянной скоростью *а*, может стать отрицательной исключительно при выполнении неравенства *а <* 0 . Положительная величина *g = -a* называется *ускорением свободного падения* и является абсолютной константой, не зависящей (если не вдаваться в особые тонкости) от условий протекания процесса. Таким образом, соотношение (1.6) может быть записано следующим образом

 . (1.8)

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.8) с начальными условиями (1.3), (1.7) и составляют математическую модель процесса свободного падения тела. Без ограничения на общность здесь можно положить *t*0 = 0 , поскольку за начальный момент времени мы вправе выбрать любое значение. Тогда, решая уравнение (1.8) с начальным условием (1.7), определяем, что скорость падающего тела будет изменяться по следующему закону: *v*(*t*) *= -g t*.Подставляя это значение в формулу (1.5) при *t*0 = 0 , установим следующую зависимость высоты падающего тела от времени при различных значениях начальной высоты

** .

Сравнивая установленный математическими средствами закон изменения высоты падающего тела с результатами эксперимента, мы заключаем, что построенная нами модель оказывается вполне удовлетворительной. Тогда, опираясь на свойства математической модели, можно получить некоторую дополнительную информацию о поведении изучаемой нами системы. В частности, для исследуемого процесса важно установить момент времени *Т*, в который тело упадет на землю, а значит, будет иметь координату *у*(*Т*),равную нулю. Полагая в последнем равенстве *t = Т* и приравнивая полученный результат нулю, найдем значение *у*0 = *gT*2/2 . Отсюда можно определить значение момента падения тела в зависимости от его начальной высоты

 .

Еще одной характеристикой процесса, имеющей практическое значение, является скорость тела в момент падения. При заданной начальной высоте тела она равна

 .

Основные этапы математического моделирования, установленные в предшествующих рассуждениях, представлены в таблице 1. Они характерны для любого моделируемого объекта.

Табл. 1. Основные этапы математического моделирования.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | этап | цель | средство |
| 1 | построение модели | математическое  описание процесса | законы природы,  установленные  частной наукой |
| 2 | анализ модели | выявление информации,  содержащейся в модели  в скрытой форме | математический и  компьютерный  анализ модели |
| 3 | идентификация модели | проверка модели  на адекватность | сравнения результатов анализа модели с экспериментальными  данными |
| 4 | применение модели | использования свойств  модели для получения  информации о процессе | решение задач прогноза, управления и др. |

Заключительное замечание касается *условий применимости* рассматриваемой математической модели. Полученные уравнения движения тела как будто остаются в силе в любой момент времени. Однако в действительности приведенная модель описывает исследуемый процесс лишь на интервале времени от нуля до *Т*, т.е. до тех пор, пока тело не долетает до земли. Если не внести соответствующее ограничение в постановку задачи, то окажется, что согласно имеющимся уравнениям наше тело благополучно провалится сквозь землю, а не хотелось бы... Таким образом, уравнения (1.1), (1.8) имеют смысл исключительно на ограниченном интервале времени 0 < *t* < *Т* , где момент времени *Т* характеризуется равенством

*у*(*Т*) *=* 0. (1.9)

Наконец, параметр *у*0 , входящий в начальное условие (1.3), должен быть непременно положительным, т.е. удовлетворять условию

*у*0 > 0 . (1.10)

Итак, полная математическая модель исследуемого процесса включает в себя уравнения состояния (1.1), (1.8) на интервале времени 0 *< t < Т* с начальными условиями (1.3), (1.7), соотношением (1.10) для нахождения конечного момента времени *Т* и условием (1.10) для параметра системы *у*0.

Следует отметить, что полученные результаты соответствуют лишь какому-то определенному уровню исследования рассматриваемого процесса и при необходимости могут быть уточнены. Так, в процессе моделирования мы совершенно игнорировали влияние силы сопротивления воздуха, а в равной степени – и возможное действие других сил, из-за которых, помимо всего прочего, движение тела может уже не оказаться прямолинейным. Нас совершенно не интересовали форма, размеры и масса тела, которые к тому же при определенных условиях сами могут меняться. Да и неизменность ускорения свободного падения следует признать истинной лишь при относительно небольшом перепаде высот.

Последние рассуждения нисколько не перечеркивают проведенный выше анализ, а свидетельствуют лишь о том, что любая модель является лишь каким-то (чаще всего – небольшим) шагом на долгом пути постижения Истины. Возможно, исходя из специфики решаемой задачи, к нашему великому удовлетворению полученная степень точности окажется вполне удовлетворительным. Однако совсем не исключено, что будут вновь обнаружены определенные расхождения результатов моделирования с экспериментальными данными. И тогда нам еще предстоит отыскивать какие-либо ошибки в принятых гипотезах или не учтенные ранее факторы и строить более точную модель. Некоторое продвижение в этом направлении делается в приложении.

## 6. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

На основании проведенных выше глубокомысленных рассуждений можно попытаться выявить некоторые общие закономерности в построении математических моделей. Прежде всего, следует понять, что же конкретно является непосредственным *объектом* нашего исследования. В качестве такового в рассмотренном выше примере выступает падающее тело. При этом форма и размеры тела, а также его внутренняя структура нас совершенно не волнуют, т.е. мы воспринимаем его как *материальную точку*.

Затем следует установить *функции состояния системы*, т.е. величины, которые, по мнению исследователя, наиболее полно отражают ход рассматриваемого процесса. Так, в приведенном выше примере нас интересовала исключительно высота тела над землей и скорость его движения. При решении задач теплофизики нам хотелось бы узнать температуру тела. В задачах химической кинетики особо важны концентрации реагирующих веществ и продуктов реакции. Для экономической модели конкретного производства определяющую роль играют его доходы... Математические модели, как правило, представляют собой некоторые уравнения относительно выбранных функций состояния.

Исследуя полученную математическую модель, решая соответствующие уравнения, мы стремимся установить характер зависимости функций состояния от тех или иных параметров. Прежде всего, это *независимые переменные*, в качестве которых обычно выступают время и пространственные переменные. В приведенном примере нас интересовало не просто положение тела, а его высота в тот или иной момент времени. При исследовании процесса теплопереноса следует установить не температуру тела вообще, а его температуру в конкретной точке.

Установив функции состояния и независимые переменные, мы должны указать *систему координат*, в рамках которой осуществляется формулировка математической модели. В частности, в задаче о падении тела за начало координат (точка на плоскости *t*, *y*) были выбраны момент начала движения и поверхность земли.

Теперь можно попытаться перейти непосредственно к выводу математических соотношений, характеризующих закон изменения функций состояния системы. Для этого необходимо выяснить, что конкретно повлияло на ход развития событий, т.е. указать *причину эволюции системы*. В рассмотренном примере единственной причиной падения тела была действующая на него сила тяготения. Другие возможные эффекты, в частности, сопротивление воздуха, в данной модели не учитывались.

Указав причины, повлекшие за собой интересующие нас события, мы должны выявить *причинно-следственную связь*, т.е. установить, как конкретно повлияла каждая из этих причин на течение моделируемого процесса. Именно эта связь, выражающая закон изменения функций состояния системы под влиянием указанных причин, и является основой математической модели. Она формулируется на основе глубинных закономерностей, установленных той или иной частной наукой. Применительно к рассмотренному примеру подобная связь выражается *вторым законом Ньютона*, согласно вторая производная от функции состояния пропорциональна действующей силе тяготения.

Записав математические соотношения, выражающие причинно-следственную связь для изучаемого явления, мы обнаружим, что помимо функций состояния и независимых переменных математическая модель включает в себя характеристики совершенно иной природы. Речь идет о *параметрах системы*, позволяющих среди всего необъятного класса явлений данной природы выбрать именно тот конкретный случай, который и представляет непосредственный интерес для нас на данном этапе исследования. Так, закон падения тела является общим для безграничного класса изучаемых объектов. Однако для нахождения положения конкретного тела в пространстве следует еще указать его начальную высоту и начальную скорость, оказывающиеся параметрами процесса. При описании процесса переноса тепла мы непременно должны учитывать теплофизические свойства рассматриваемого тела.

Формально параметры системы могут меняться произвольным образом. Однако далеко не все варианты задания этих величин имеют физический смысл. Следует указать условия применимости математической модели, т.е. диапазон изменения параметров (как независимых переменных, так и параметров системы), при которых установленная модель имеет смысл. В частности, уравнение движения падающего тела остаются в силе лишь вплоть до момента приземления, а начальная высота тела должна быть положительна.

Итак, в состав математической модели обычно входят три класса характеристик. Параметры процесса в каждом конкретном случае считаются фиксированными величинами и составляют *входную информацию*. Независимые переменные не фиксированы и меняются в некоторых пределах, образуя тем самым область определения функций состояния. Таким образом, математическая модель чаще всего представляет собой задачу восстановления зависимости функций состояния от соответствующих переменных при допустимом наборе параметров процесса.

После вывода необходимых математических соотношений нам предстоит выяснить, какие сведения о процессе представляют для нас практический интерес помимо функций состояния системы, т.е. следует указать *выходную информацию*. В качестве таковой в задаче о падении тела являются момент падения тела на поверхность земли и скорость тела в этот момент времени.

Подводя итоги, заключаем, что построение математической модели исследуемого процесса включает в себя следующие элементы:

1. Объект исследования.
2. Функции состояния системы.
3. Независимые переменные.
4. Система координат.
5. Причины эволюции системы.
6. Причинно-следственная связь.
7. Входные параметры системы.
8. Условия применимости математической модели.
9. Выходные параметры системы.

Характеристика основных элементов построения математической модели процесса падения тела приводится в таблице 2.

Табл. 2. Основные элементы математической модели процесса падения тела.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | элементы | процесс падания тела |
| 1 | объект исследования | падающее тело |
| 2 | функции состояния | высота (координата) тела, его скорость |
| 3 | независимая переменная | время |
| 4 | система координат | координата направлена  вертикально вверх,  начало координат – поверхность земли |
| 5 | причина эволюции | сила тяготения |
| 6 | причинно-следственная  связь | вторая производная от координаты  пропорциональна силе тяготения |
| 7 | входные параметры | начальная высота тела |
| 8 | условия  применимости модели | движение – до момента приземления,  начальная высота тела положительна |
| 9 | выходные параметры | время падения,  скорость в момент приземления |

Все эти вопросы в значительной степени решаются средствами той или иной частной науки (физики, химии, биологии и т.п.), к которой, по нашему мнению, относится изучаемое явление. И лишь ответив на них, мы сможем забыть на некоторое время частные науки и обратиться к чистой математике. Теперь в нашем распоряжении имеются конкретные математические соотношения, которые предстоит исследовать на основе тех или иных качественных и количественных методов. Проведя соответствующий анализ исключительно математическими средствами (как правило, с применением компьютера), мы вновь возвращаемся к рассматриваемому явлению с целью физической интерпретации полученных результатов, уточнения стоящих перед нами задач и подведению соответствующих итогов.

## 7. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В зависимости от особенностей величин, входящих в состав математических моделей, можно указать некоторые принципы их классификации. В дальнейшем мы будем различать *системы с сосредоточенными параметрами*, в которых функция состояния зависит только от времени, и *системы с распределенными параметрами*, где допускается также зависимость функции состояния от пространственных переменных. В частности, колебание маятника или полет снаряда при определенных условиях сравнительно сносно описываются системами с сосредоточенными параметрами, а распространение тепла или движение жидкости в некотором объеме – системами с распределенными параметрами. В качестве систем с сосредоточенными параметрами чаще всего выступают *обыкновенные дифференциальные**уравнения*. Системы с распределенными параметрами обычно характеризуются *дифференциальными уравнениями с частными производными*.

Помимо уравнений для описания тех или иных процессов применяются также *вариационные принципы*. Так, движение материальной точки (в частности, процесс падения тела) в классической механике можно описать не только с помощью уравнений движения, но и на основе принципа наименьшего действия, согласно которому эволюция системы осуществляется таким образом, чтобы затраты энергии при этом оказались минимальными.

Различают также *стохастические модели*, в которых допускается влияние на процесс каких-либо случайных факторов, и *детерминированные модели*, где подобные эффекты не учитываются, а состояние системы определяется однозначно. Рассматриваются *непрерывные системы*, в которых независимые переменные меняются непрерывным образом, и *дискретные системы* с независимыми переменными, изменяющимися с некоторым шагом (постоянным или нет). Отметим также *динамические системы* с функциями состояниями, меняющимися со временем, и *стационарные системы*, характеристики которых со временем не меняются. Имеются и некоторые другие способы классификации математических моделей, связанные, например, со спецификой полученных в процессе моделирования математических задач.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим некоторые явления, относящиеся к классической механике и связанные с движением тела в поле силы тяготения. Как и в рассмотренном ранее примере предполагается, что в процессе движения форма и внутренняя структура тела не меняются, так что все его точки описывают одинаковые траектории. Таким образом, интересующие нас объекты исследования по-прежнему являются материальными точками. Несомненным шагом вперед по сравнению с задачей о падении тела под действием собственного веса здесь будет учет воздействия на тело не только тяготения, но и некоторых других сил. Для описания процесса движения мы вновь воспользуемся вторым законом Ньютона, согласно которому скорость изменения импульса тела равна сумме действующих на него сил.

Ниже рассматриваются задачи о движении зонда, ракеты и планера, каждая из которых обладает своей спецификой. Так, если для ракеты (как и для падающего тела) мы пренебрегаем влиянием силы сопротивления воздуха, то для зонда и планера это воздействие будет учитываться, причем для легкого планера допускается линейный характер зависимости сопротивления от скорости, а для массивного зонда эта зависимость предполагается квадратичной. Подобно падающему телу, зонд движется прямолинейно, в то время как ракета и планер летят в вертикальной плоскости и характеризуются двумя пространственными координатами. В отличие от других рассматриваемых объектов у зонда в процессе движения меняется масса. Ракета и зонд осуществляют свой полет под действием силы тяги, тогда как на планер оказывает влияние подъемная сила.

### **1. Полет зонда.**

Рассмотрим движение зонда, запускаемого в вертикальном направлении. Функция состояния *у = у*(*t*) будет характеризовать высоту данного объекта над землей в соответствующий момент времени. Будем считать, что система координат выбрана так же, как и в задаче падения тела. Действующая на тело сила *F* складывается из силы тяги *R*, обусловленной сгоранием топлива, силы сопротивления воздуха *Q* и веса *P*. При этом сила тяги неизменно направлена вверх, т.е. в сторону движения, вес – в противоположном направлении, а сила сопротивления – против направления движения. Таким образом, получаем равенство *F = R* – *Q – P* . Учитывая, что импульса тела равен произведению его массы на скорость, приходим к уравнению движения



Сила тяги возникает за счет сгорания топлива. Будем полагать, что скорость сгорания (и, тем самым, реактивная сила) постоянна на всем интервале времени, пока имеется запас топлива. Тогда величина *R* будет постоянной и равной *R*0 вплоть до момента времени *t\** , когда топливо полностью сгорит, где *R*0есть постоянная силы тяги(параметр задачи). Таким образом, сила тяги определяется по формуле



Сила сопротивления воздуха существенным образом зависит от скорости движения тела. В частности, с ростом скорости происходит быстрое увеличение силы сопротивления. При некоторых условиях зависимость силы сопротивления от скорости можно считать квадратичной. Следует иметь в виду, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения. В результате приходим к равенству

 ,

где *b* – коэффициент сопротивления воздуха, зависящий существенным образом от формы тела. При подъеме зонда справедливо неравенство *v* **>** 0 , а значит, *Q* **>** 0 . При спуске зонда имеем *v* **<** 0 , а следовательно, *Q* **<** 0 . В обоих случаях сила сопротивления тормозит движение. Вес тела равен *P = m g* . Подставляя соответствующие значения сил в уравнение движения, будем иметь

.

В процессе сгорания топлива масса убывает. Следовательно, скорость изменения массы должна быть отрицательной:

****.

Функциюβ определим по формуле



Таким образом, до тех пор, пока имеется запас топлива, масса зонда убывает с постоянной скоростью β0. Как только все топливо сгорело, масса перестает изменяться.

Будем полагать, что в начальный момент времени *t =* 0 зонд находится на земле и покоится, а его начальная масса равна *m*0 . Тогда начальные условия принимают вид



В соответствии с полученными соотношениями зонд поднимается под действием силы тяги. Со временем все топливо сгорает, после чего зонд некоторое время летит по инерции, а затем падает вниз за счет силы тяготения. Рассматриваемые соотношения остаются в силе вплоть до некоторого момента времени*T*, когда зонд окажется на поверхности земли, а значит, будет удовлетворять условию *у*(*T*) = 0 .

Параметрами задачи являются сила тяги *R*0 , время сгорания топлива *t\** , коэффициент сопротивления воздуха *b*, скорость сгорания топлива β0и начальная масса зонда *m*0. К числу выходных параметров процесса, т.е. дополнительных характеристик, представляющих несомненный практический интерес, можно отнести максимальную высоту подъема зонда, время набора максимальной высоты, время приземления зонда и его скорость в момент приземления.

Отметим, что не при всех указанных значениях параметров процесса рассматриваемая математическая модель имеет смысл. Прежде всего, зонд непременно должен взлететь. Это означает, что сила, действующая на тело в начальный момент времени, должна быть положительной. Полагая в правой части уравнении движения *t =* 0и учитывая начальные условия, приходим к неравенству *R*0*а* **>** *m*0 *g* . Таким образом, зонд взлетит лишь в том случае, когда сила тяги будет превышать его начальный вес.

Очевидно, в момент сгорания топлива масса зонда должна быть положительной. Интегрируя уравнение для массы от нуля до *t\** , получаем

*m*(*t\**) – *m*0 *=* –β0 *t\** .

В результате получаем неравенство *m*0> β0*t\** , гарантирующему положительность массы при *t = t\** , т.е. полезной массы зонда.

#### **Компьютерный эксперимент. Полет зонда.**

Обратиться к лабораторной работе "*Вертикальный полет зонда*" обучающего программного комплекса "*Математические модели естествознания*". Рекомендуется провести следующий анализ:

1. На основе имитационной модели процесса, а также графиков изменения со временем высоты зонда над землей и его скорости выявить основные этапы его движения – активный полет, подъем по инерции после отключения двигателей, падение с ускорением, спуск с (практически) постоянной скоростью.

2. Обратить внимание на изменение со временем массы зонда, а также различных видов сил и энергии.

3. Меняя параметры процесса обнаружить две причины нарушения условий применимости модели – недостаточность силы тяги и чрезмерно большой расход топлива.

4. Установить влияние различных параметров на максимальную высоту подъема зонда и время его движения.

### **2. Полет ракеты.**

Рассматривается движение баллистической ракеты, запущенной под некоторым углом к горизонту. В этом случае движение тела уже не никак будет прямолинейным, поскольку на него оказывает влияние не только сила тяготения, направленная строго вниз, но и сила тяги *F*, действующая под некоторым углом к горизонту (см. рис. 2). Положение ракеты будем характеризоваться горизонтальной координатой *x* и вертикальной координатой *y*. Точка старта ракеты выбирается в качестве начала координат. Тогда функции *x* = *x*(*t*) выражает расстояние от проекции точки, в которой находится ракета в данный момент времени, на горизонтальную плоскость (поверхность земли), до начала координат, а функция *y* = *y*(*t*) определяет высоту ракеты над землей. Для вывода уравнений движения необходимо записать второй закон Ньютона в векторной форме. Отметим, что в горизонтальном направлении будет действовать горизонтальная составляющая *Fx*силы тяги, а вертикальном – вертикальная составляющая силы тяги *Fy* и вес *Р* (см. рис. 2). В отличие от предшествующего случая будем полагать, что масса топлива много меньше массы ракеты, так, что изменением массы в процессе движения ракеты можно пренебречь.

Согласно второму закону Ньютона ускорение тела в горизонтальном и вертикальном направлении будут пропорциональны соответствующим силам. В результате получаем следующую систему уравнений движения



Составляющие силы тяги вычисляются по формулам

*Fx = F* cosϕ ,  *Fy = F* sinϕ,



Рис. 2. Силы, действующие на ракету.

где ϕ *=* ϕ(*t*) – угол между направлением силы тяги и горизонтальной осью координат. Тем самым уравнения движения принимают вид



где *а = F/m* .

Сила тяги действует до тех пор, пока все топливо не сгорит. Время сгорания топлива *t\** считается известным. Тогда справедливо равенство

 ,

где *а*0 – отношение силы тяги *F* к массе ракеты *m*, являющееся параметром процесса.

Предположим, что в начальный момент времени ракета находится в начале координат и покоится, что соответствует начальным условиям



Движение ракеты продолжается вплоть до некоторого момента времени *Т*, в который она приземлится, а значит, будет иметь нулевую вертикальную координату. Тем самым приходим к условию *y*(*Т*) = 0, из которого следует найти время приземления *Т*.

Параметрами рассматриваемой математической модели являются угол *u*, вообще говоря, зависящий от времени, отношение *а*0 и время сгорания топлива *t\** . Рассматриваемая математическая модель имеет смысл лишь в том случае, когда ее начальное вертикальное ускорение положительно (положительность горизонтальной составляющей вектора ускорения очевидна). Начальное ускорение в вертикальном направлении равно

 .

Таким образом, приходим к следующему условию применимости модели

 .

#### **Компьютерный эксперимент. Движение ракеты.**

Основываясь на лабораторной работе "*Вертикальный полет зонда*", провести следующий анализ:

1. На основе выводимой информации установить три стадии полета ракеты: активный полет, подъем по инерции и спуск.

2. Обратить внимание на изменение различных видов сил и энергии.

3. Установить неприменимость модели при малых значениях силы тяги.

4. Установить влияние различных параметров на ход процесса.

### **3. Полет планера.**

Рассмотрим движение планера в вертикальной плоскости. Оно происходит под действием сил тяготения, сопротивления воздуха, а также подъемной силы (см. рис. 3). Сила сопротивления *F*1 считается пропорциональной скорости движения планера и направлена в противоположную сторону. Подъемная сила *F*2 пропорциональна квадрату вектора скорости и направлена перпендикулярно движению планера. В результате получаем уравнения

,

где *u* – горизонтальная скорость планера, *v* – вертикальная скорость, *b* – коэффициент сопротивления, *k* – коэффициент подъемной силы.

В начальный момент времени планер поднимается с земли (начало координат) с некоторой скоростью *w* под углом ϕ к горизонту. Таким образом, имеем начальные условия

*x*(0) = 0 , *y*(0) = 0 , *u*(0) = *w* cosϕ , *v*(0) *= w* sinϕ.

Движение планера продолжается вплоть до момента времени *Т*, когда он приземлится, т.е. когда будет выполнено равенство *y*(*Т*) = 0. Отметим, что движение планера происходит не для всех начальных состояний системы.



Рис. 3. Силы, действующие на планер.

#### **Компьютерный эксперимент. Полет планера.**

Основываясь на лабораторной работе "*Полет планера*", провести следующий анализ:

1. На основе выводимой информации объяснить, чем обусловлена наблюдаемая траектория движения планера.

2. Обратить внимание на изменение со временем различных видов сил и энергии.

3. Меняя параметры процесса, обнаружить режим "мертвая петля".

## КОММЕНТАРИИ

Различные аспекты взаимодействия математики с окружающим миром рассматриваются, например, в книгах Ж. Адамара [1], Н. Бурбаки [14], Г. Вейля [16], Н. Винера [17], В. Гейзенберга [22], [23], Б. В. Гнеденко [25], Ф. Дж. Дайсона [30], Л. Заде [35], М. Клайна [45], [46], Л. Д. Кудрявцева [55], Н. Н. Моисеева [92], А. Пуанкаре [113], Б. Рассела [114], К. Стюарта [126], Г. Хакена [138], О. Шпенглера [147], Г. Штейнгауза [148], И. М. Яглома [154] (см. также [48], [78], [80], [110], [121], [122]).

Задачи классической механики изучаются, например, в книгах   
Н. Н. Бухгольца [15], Ч. Киттеля, У. Найта и М. Рудермана [44], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [60], К. Ланцоша [65], С.Э. Хайкина [137], а вопросы компьютерного моделирования таких задач – у Х. Гулда и Я. Тобочника [27].

Некоторые проблемы теории дифференциальных уравнений будут рассматриваться в лекциях № 4 и № 16 (см. также монографии В. А. Арнольда [5], Е. А. Коддингтона и Н. Левинсона [49], Е. Лефшеца [67], Ф. Хартмана [140] и   
Л. Э. Эльсгольца [151]). Методы численного решения дифференциальных уравнений описываются в [125].

В дальнейшем уравнение падения тела будет выведено с помощью вариационного принципа наименьшего действия (см. лекция №10), что позволяет взглянуть на рассматриваемую проблему с несколько иных позиций. Аналогичным способом можно получить и уравнения движения материальной точки, применяемые в приложении (более подробно эти вопросы рассматриваются в [65]).

Системы с сосредоточенными параметрами описываются в лекциях № 2, 3, 5 – 9, а системы с распределенными параметрами – в лекциях № 12 – 15, 17. Вариационные принципы, как математические модели физических процессов, исследуются в лекции № 10. Подавляющее большинство рассматриваемых в настоящем курсе процессов являются детерминированными, некоторые стохастические системы рассматриваются в лекциях № 16 и 17. Методы статистического моделирования описываются, например, в книге С. М. Ермакова и   
Г. А. Михайлова [33]. Все модели, за исключением тех, что приводятся в лекции № 15, связанны с динамическими системами. Дискретные модели в настоящем курсе не рассматриваются (некоторые задачи такого типа исследуются, например, в книгах К. Хуанга [145] и С. В. Яблонского [153]).

К математической модели движения ракеты мы вернемся в лекции № 11, где будет исследована задача определения такого угла ϕ, при котором ракета улетит как можно дальше, рассматриваема в книге С. Лоудена [71]. Там же описывается одна оптимизационная задача, связанная с полетом зонда. Вопросы динамики полета достаточно подробно рассматриваются А. Миеле [89].

Дальнейшее исследование задач динамики материальной точки осуществляется в последующей лекции, посвященной механическим колебаниям.

# Лекция № 2 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

*Трудно отделаться от ощущения, что эти математические формулы   
существуют независимо от нас и   
обладают собственным разумом, что они умнее нас, умнее тех, кто открыл их, и что мы извлекаем из них больше, чем было в них первоначально заложено.*

Генрих ГЕРЦ

Первые серьезные результаты математического моделирования естественно относятся к механике. Одна из наиболее восхитительных задач классической механики, имеющая существенный теоретический интерес и многочисленные практические приложения, связана с процессом колебания маятника. В соответствии с описанной в предшествующей лекции процедурой осуществляется вывод уравнения движения математического маятника. В случае малых колебаний это уравнение оказывается линейным, а его решение – периодической функцией. Вычисляется энергия колебания маятника. С целью уточнения результатов учитывается влияние силы трения. В приложении рассматриваются вынужденные колебания маятника, движение пружины, а также некоторые специфические задачи теории нелинейных колебаний.

## 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА

Объектом нашего исследования является маятник – массивное твердое тело, подвешенное на длинной тонкой нити. Его размеры и свойства нити нас совершенно не должны волновать. Таким образом, мы имеем дело с материальной точкой, обозначаемой через *М* и находящейся в нижнем конце нити (см. рис. 4).

Движение маятника осуществляется под действием силы тяготения и происходит в плоскости, образованной начальным положением нити и ее вертикальным состоянием – прямой *ОА*. Пренебрегая изменением длины нити, заключаем, что точка *М* неизменно находится на одном и том же расстоянии *L* от точки *О* закрепления нити. Рассматриваемый при этих допущениях идеализированный объект принято называть *математическим маятником*.

****

Рис. 4. Математический маятник.

Нам предстоит теперь выбрать функцию состояния системы, т.е. некоторую величину, характеризующую, как нам кажется, движение маятника. Здесь имеется определенная свобода выбора. В качестве функции состояния можно было бы выбрать отклонение маятника от вертикальной оси, т.е. отрезок *МВ*, изменение высоты маятника *ВМ*0 над землей по сравнению с его положением в точке *М*0 , соответствующей вертикальному положению нити, а также угол *х* между отрезками *ОМ* и *ОА*. Все эти три варианта эквивалентны, а соответствующие величины связаны следующими очевидными соотношениями:

*MB = L* sin *x* , *ВМ*0 *= L* (1–cos *x*) .

В механике обычно принято в качестве функции состояния выбирать *угол* *х*. Таким образом, нам предстоит установить характер его изменения со временем. Соотношения, позволяющие найти вид указанной функциональной зависимости, и составляет математическую модель рассматриваемого процесса.

В основе построения модели, как и в предыдущей лекции,   
лежит второй закон Ньютона, согласно которому ускорение маятника *а* в направлении его движения пропорционально действующей силе *F*. Тогда справедливо равенство *m a = F* , где *m* – масса маятника. Движение маятника в любой момент времени происходит в направлении, перпендикулярном текущему положению нити *ОМ* (см. рис. 4). Интересующая нас сила представляет собой проекцию веса *Р* на направление движения маятника. В результате находим значение

*F =* – *P* sin *x* =– *m g* sin *x* .



Рис. 5. Вычисление угловой скорости.

Знак "минус" здесь обусловлен тем, что движение маятника происходит в сторону, противоположную его отклонению от вертикального положения, а возрастание угла почему-то принято отсчитывать в   
направлении против часовой стрелки.

Итак, второй закон Ньютона принимает следующий вид

 ,

где *v* – скорость маятника. Таким образом, получаем уравнение

 , (2.1)

откуда, в частности, сразу следует, что закон движения маятника   
не зависит от его массы.

Для преобразования полученного соотношения необходимо еще установить связь линейной скорости *v* с функцией состояния системы *х*, а точнее, с ее производной, называемой *угловой скоростью*. Предположим, что в момент времени *t* маятник находится в точке *M*(*t*) под углом *x*(*t*) к оси *ОА*, а в момент времени *t*+τ – в точке *М*(*t*+τ) под   
углом *х*(*t*+τ) (см. рис. 5 а). Обозначив через *r*(τ) расстояние между   
рассматриваемыми точками, найдем скорость маятника

.

Величина *r*(τ) определяется из равенства (см. рис. 5 б)



где . В результате находим величину



Учитывая очевидные равенства

 ,

установим, что скорость маятника определяется по формуле . Подставляя это значения в соотношение (2.1), получаем уравнение

 .

Вводя параметр процесса



называемый *частотой* (точнее, собственной частотой) колебания   
маятника, получаем следующий вид уравнения движения

 . (2.2)

Соотношение (2.2) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции состояния *х*. Это уравнение оказывается *нелинейным* в том смысле, что сумма двух   
решений и произведение решения на число, увы, никак не будут решениями рассматриваемого уравнения.

Нелинейные системы отличаются весьма изощренными свойствами, а их анализ связан с серьезными трудностями. В частности, у нас нет никакой возможности найти аналитическое решение полученного уравнения. Однако задача существенно упрощается при рассмотрении *малых* колебаний маятника, когда значение синуса сколь угодно близко к величине самого угла, т.е. справедливо условие sin *x* ≈ *x* . В этом случае установим соотношение

 (2.3)

называемое *уравнением гармонического осциллятора* или *уравнением колебания маятника* (точнее, малых свободных колебаний). Оно-то и будет лежать в основе дальнейшего анализа исследуемого процесса. Нетрудно убедиться, что сумма двух решений уравнения (2.3) и произведение решения на константу непременно будут удовлетворять этому же соотношению, т.е. мы действительно имеем дело с *линейным*   
объектом.

Для завершения математического описания процесса остается еще привести информацию о начальном состоянии системы. Предположим, что в момент времени *t* = 0 маятник находится под углом *x*0 к вертикальной оси и имеет угловую скорость *x*1. Тогда начальные   
условия принимают вид

 (2.4)

Соотношения (2.3), (2.4), составляющие задачу Коши, являются математической моделью рассматриваемого процесса, включающей в себя параметры ω0 (частоту колебания, определяемую длиной маятника), *x*0 (начальное положение) и *x*1 (начальную скорость). В таблице 3, аналогичной приведенной в предшествующей лекции таблице 2, представлены основные элементы рассматриваемой математической модели.

Табл. 3. Основные элементы  
математической модели малых колебаний маятника.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | элементы | процесс падания тела |
| 1 | объект исследования | математический маятник |
| 2 | функции состояния | угол, угловая скорость |
| 3 | независимая переменная | время |
| 4 | система координат | угол отсчитывается против часовой стрелки начало отсчета – положение равновесия |
| 5 | причина эволюции | сила тяготения |
| 6 | причинно-следственная  связь | второй закон Ньютона |
| 7 | входные параметры | начальный угол,  начальная скорость, длина маятника |
| 8 | условия  применимости модели | начальный угол и начальная скорость достаточно малы,  длина маятника положительна |
| 9 | выходные параметры | амплитуда, частота, период и фаза колебания |

Нам предстоит теперь провести математический анализ имеющейся задачи Коши и интерпретировать свойства ее решения.

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА

Вторая стадия исследования, как обычно, предполагает математический анализ полученной модели с целью извлечения информации, содержащейся в ней в скрытой форме. В соответствии с классической теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений   
составляется *характеристическое уравнение*

 .

Оно представляет собой алгебраическое (квадратное) уравнение   
относительно параметра λ и имеет корни λ1 = **i** ω0 , λ2 = *-* **i** ω0 , где   
**i** – мнимая единица. Тогда общее решение уравнения (2.3) определяется по формуле

*x*(*t*) = *c*1 sin ω0 *t* + *c*2 cos ω0 *t* , (2.5)

где *c*1 , *c*2 – произвольные постоянные.



Рис. 6. Решение задачи (2.3), (2.4) – периодическая функция.

Для нахождения конкретных значений указанных констант   
воспользуемся начальными условиями (2.4). Справедливы равенства

 .

В результате соотношение (2.5) принимает вид

 .

Полученная формула действительно дает решение задачи (2.3), (2.4).

Для анализа математической модели решение удобнее записать в виде

*x*(*t*) = *a* sin(ω0 *t* + ϕ) , (2.6)

где параметры *а* и ϕ называются соответственно, *амплитудой* и начальной *фазой* колебания. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что для любых значений *а* и ϕ формула (2.6) действительно дает решение уравнения (2.3). Таким образом, соотношения (2.5) и (2.6) эквивалентны. Конкретные значения параметров *а* и ϕ определяются из условий (2.4). Пользуясь равенствами

 ,

находим величину начальной фазы и амплитуду колебания



Установленное решение задачи Коши (2.3), (2.4) оказывается *периодической функцией* (см. рис. 6) с *периодом колебания Т* = 2π/ω0 . Таким образом, маятник совершает колебания вокруг своего положения равновесия. Максимальное отклонение маятника от его вертикального положения соответствует его амплитуде. Частота, фаза,   
амплитуда и период колебания являются важнейшими характеристиками колебательного процесса. Информация о них позволяет дать весьма удовлетворительную интерпретацию полученных результатов, что составляет третий этап исследования задачи.

#### **Компьютерный эксперимент. Малые колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Малые свободные колебания маятника*" обучающего программного комплекса "*Математические модели естествознания*". Провести следующий анализ в режиме "*трение отсутствует*".

1. На основе имитационной модели процесса и изменения со временем угла отклонения маятника от положения равновесия убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически.

2. Обратить внимание на то, что в фазовой плоскости (плоскости, образованной функциями состояния системы, т.е. углом и угловой скоростью)   
такому движению соответствует замкнутая кривая (в данном случае – эллипс).

3. Меняя последовательно длину маятника, его начальное положение и начальную скорость, обнаружить изменение амплитуды, частоты и периода колебания. Убедиться в отсутствии влияния массы маятника на процесс колебания.

#### **Компьютерный эксперимент. Нелинейные колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Нелинейные колебания маятника*" Провести следующий анализ в режиме "*трение отсутствует*".

1. Убедиться, что при малых значениях начальных состояниях системы решение уравнения нелинейных колебаний достаточно близко к решению уравнения гармонического осциллятора.

2. Увеличивая начальное отклонение или начальную скорость маятника, добиться больших расхождений в решениях линейного и нелинейного уравнений.

3. При достаточно больших начальных состояниях системы обнаружить вращение маятника вокруг точки подвеса.

## 3. ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА

При описании механического движения представляет интерес также энергия движущегося тела. Для оценки закона изменения энергии запишем уравнение колебания маятника (2.3) в следующем виде

 .

Умножая это соотношение на производную от *х*, будем иметь

 .

Учитывая установленное ранее условие , преобразуем предшествующее равенство к следующему виду

 .

Отсюда после умножения на массу маятника *m* следует равенство

 . (2.7)

Первое слагаемое в левой части равенства (2.7) представляет собой *кинетическую энергию* *К*. Потенциальная энергия маятника   
будет равна *U = mgh* , где значение *h* соответствует длине отрезка *ВМ*0на рис 4. Последняя является разностью между длиной маятника *L* и отрезком *OМ*0 , равным *L* cos *x* . Таким образом, справедливо равенство *U = Lmg* (1 – cos *x*) . В случае малости угла *x* получаем соотношение cos *x* ≈ (1 – *x*2 /2) . Следовательно, второе слагаемое в левой части равенства (2.7) соответствует (в случае малых колебаний) *потенциальной энергии*. Вводя обозначения

 ,

установим соотношение

*K + U* = const , (2.8)

выражающее *закон сохранения энергии*. Конкретное значение в правой части равенства (2.8) определяется начальными значениями положения и скорости маятника, задающими соответственно, его потенциальную и кинетическую энергию в начальный момент времени.

Полученные результаты позволяют дать интерпретацию движения маятника с энергетической точки зрения. Предположим, к примеру, что в начальный момент времени маятник имеет некоторое отклонения от вертикального положения и нулевую начальную скорость. Тогда в начальный момент времени его кинетическая энергия будет равна нулю, а потенциальная – принимает некоторое значение, определяемое начальным положением. По мере стремления маятника к вертикальному положению будет уменьшаться его отклонение от равновесия, а значит, и потенциальная энергия. Следовательно, в соответствии с условием (2.8) должна расти кинетическая энергия, а значит, и скорость движения. За время, равное четверти периода колебаний, маятник достигнет положения равновесия, характеризуемого нулевой потенциальной энергией. Таким образом, вся исходная потенциальная энергия перешла в кинетическую, что соответствует максимальной скорости движения. Далее по инерции маятник начнет отклоняться в противоположную сторону, приобретая некоторую потенциальную энергию. В соответствии с законом сохранения энергии его кинетическая энергия начинает падать, а маятник замедляет движение. По прошествии половины периода маятник остановится. Тем самым его кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную, в точности совпадающую с первоначальной (при сделанных предположениях энергия в процессе движения не теряется). Это означает, что маятник отклонился на такой же угол, что и в начальный момент времени, хотя и в другую сторону. Затем процесс возобновляется, причем каждые четверть периода наблюдается переход из одного типа энергии в другой.

#### **Компьютерный эксперимент. Энергия колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Малые свободные колебания маятника*". Провести следующий анализ в режиме "*трение отсутствует*".

1. Вывести на экран графики изменения кинетической и потенциальной энергий маятника. Убедиться в том, оба вида энергии меняются со временем периодически.

2. На основе графика зависимости полной энергии системы от времени убедиться в справедливости закона сохранения энергии.

3. Установить характер зависимости начальных условий, а также массы маятника на величину полной механической энергии маятника.

## 4. КОЛЕБАНИЕ МАЯТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Согласно формуле (2.6) решению уравнению рассматриваемой задачи соответствуют гармонические колебания маятника. Однако стоит нам поставить простейший эксперимент, как мы убеждаемся, что наши смелые предсказания в действительности нарушаются. Вместо ожидаемого периодического изменения отклонения маятника от положения равновесия наблюдаемые на практике колебания со временем почему-то упорно затухают. Это наводит на мысль о том, что *на исследуемый объект действует некоторая дополнительная сила*, которая ощутимо тормозит его движение. С подобным эффектом нам уже приходилось встречаться при математическом описании задач о движении зонда и планера (см. лекцию № 1). Таким образом, для получения   
более точной математической модели рассматриваемого явления непременно следует учесть влияние указанной силы, которая называется *силой трения*и обозначается через *F*тр .

Если на тело действует исключительно сила трения, то рассматриваемый процесс в соответствии со вторым законом Ньютона описывается уравнением



Сила трения должна действовать в сторону, противоположную   
направлению движения, и зависеть от скорости тела. В простейшем случае такую зависимость можно считать линейной (как и ранее в уравнениях движения планера). Для малых колебаний маятника это допущение достаточно точно соответствует действительности, хотя в ряде случаев приходится допускать и более сложный характер этой зависимости (см., например, описанную в предшествующей лекции задачу о движении зонда, а также рассматриваемый в приложении   
маятник Фруда). Таким образом, силу трения можно вычислять по формуле  где положительная константа *k* константа является параметром процесса и называется *коэффициентом трения*.

Итак, уравнение движения под действием силы трения приводится к виду

 (2.9)

где τ = *m/k* – параметр процесса. Попытаемся прояснить природу этого коэффициента. Функция состояния *х* измеряется в радианах, ее производная, т.е. угловая скорость  – в радианах в секунду, а угловое ускорение  – в радианах, деленных на секунду в квадрате. Для того чтобы равенство (2.9) имело смысл, необходимо, чтобы оба слагаемые в его левой части измерялись в одних и тех же единицах. В результате заключаем, что параметр τ измеряется в секундах, т.е. имеет смысл времени. Его называют *временем релаксации*. Эта величина показывает, как быстро сила трения тормозит движение тела.

Найдем решения уравнения (2.9). Определив скорость *v* =  , установим уравнение первого порядка



Его решение с начальным условием *v*(0) = *v*0 , где *v*0 – начальная скорость тела, имеет вид (см. рис. 7)

*v*(*t*) *= v*0 exp (-*t*/τ) . (2.10)

Итак, скорость тела со временем убывает под действием силы трения, причем тем быстрее, чем меньше время релаксации или, что эквивалентно, чем больше коэффициент трения (т.е. чем больше влияние   
силы трения).



Рис. 7. Решение уравнения движения тела под действием силы трения.

Для нахождения закона изменения положения тела в пространстве решим уравнение  = *v* . В результате находим функцию

*x*(*t*) = *x*0 + τ *v*0 [1 – exp (-*t*/τ)] , (2.11)

где *x*0 – начальное положение тела. Нетрудно убедиться, что функция *х* со временем возрастает (см. рис. 7).

Определим свойства решения задачи при неограниченном возрастании времени. Из соотношений (2.10), (2.11) находим значения пределов



Итак, со временем скорость тела падает и стремится к нулю, а его   
положение достигает некоторого предельного значения *x*\* = *x*0 + τ *v*0 (см. рис. 7). Таким образом, под действием силы трения тело, в конце концов, остановится на расстоянии τ*v*0 от точки *x*0 , где она находилась в начальный момент времени.

Отметим, что при τ → ∞ или, что то же самое, при *k* → 0 сила трения стремится к нулю. Тогда из формулы (2.10) следует, что скорость тела равна *v*(*t*) = *v*0 , т.е. мы имеем дело с равномерным движением. Это вполне естественно – в отсутствии каких-либо сил скорость тела, конечно же, не меняется.

Обратимся теперь к исследованию движения маятника при   
наличии силы трения. В этом случае на рассматриваемый объект   
помимо тяготения действует сила трения *F*тр , прямо пропорциональная (угловой) скорости движения маятника. В результате получаем соотношение

.

Вводя обозначение τ = *mL / k* , установим уравнение движения маятника при наличии трения

 (2.12)

При ω0 = 0 оно дает соотношение (2.9), а при τ → ∞ сводится к уравнению гармонического осциллятора (2.3). Отметим, что в данном случае масса маятника будет параметром процесса, оказывающим   
существенное влияние на время релаксации.

Найдем какое-либо частное решение уравнения (2.12). Можно предположить, что, оно будет складываться из периодической функции, подобной решениям (2.5) или (2.6) уравнения гармонического осциллятора (2.3), и экспоненциально убывающей функции, аналогичной решению (2.11) уравнения (2.9). Таким образом, решение задачи можно попытаться искать в виде

*x*(*t*) = exp(-β*t*) sin(ω*t*) , (2.13)

где параметры β и ω подбираются так, чтобы обеспечить выполнение равенства (2.12).

Определим производные рассматриваемой функции:



Подставляя эти значения в равенство (2.12), будем иметь

(β2 – ω2 +  – β/τ) exp(-β*t*) sin(ω*t*) + ω(1/τ – 2β) exp(-β*t*) cos(ω*t*) = 0 .

Для справедливости данного соотношения необходимо обратить в нуль коэффициенты перед тригонометрическими функциями. Второе слагаемое здесь равно нулю при выполнении условия β = τ/2 . Обращаем в нуль первое слагаемое, полагая

ω2 =  + β2 – β/τ =  – (1/2 τ) 2 .

Таким образом, находим частоту

 .

Согласно формуле (2.13), дающей решения уравнения (2.12) с начальными условиями  колебания маятника при наличии трения затухают (см. рис. 8). При этом частота затухающих колебаний ω меньше частоты собственных колебаний ω0 и стремится к ней при неограниченном возрастании времени релаксации.

#### **Компьютерный эксперимент. Малые колебания с трением.**

Обратиться к лабораторной работе "*Малые свободные колебания маятника*". Провести следующий анализ в режиме "*трение учитывается*".

1. Убедиться в том, что маятник совершает затухающие колебания. При этом на фазовой плоскости наблюдается закручивающаяся спираль.

Рис. 8. Затухающие колебания маятника.

2. Выводя на экран сумму кинетической и потенциальной энергии, убедиться в том, что со временем это значение стремиться к нулю.

3. Оценить влияние массы маятника, его длины и коэффициента трения на скорость затухания колебаний.

4. Задавая достаточно большие значения коэффициента трения, обнаружить монотонное затухание колебаний.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Наряду со свободными колебаниями маятника значительный интерес представляют также и его вынужденные колебания, когда на систему действует какая-либо внешняя сила. Уравнение движения при этом становится *неоднородным*, т.е. в его правую часть входит некоторая известная величина. Если эта сила меняется периодически, то решение задачи также оказывается периодической функцией. Особый интерес здесь представляет явление резонанса, при котором частота вынужденных колебаний совпадает с собственной частотой ω0 .

Математические модели колебательных процессов могут служить отправной точкой для изучения положений равновесия динамических систем. Определяющую роль здесь играет поведение системы при неограниченном возрастании времени.

К колебанию маятника достаточно близок процесс движения пружины, который при естественных предположениях также описывается уравнением гармонического осциллятора. Существенно более сложные и подчас неожиданные решения возникают в задачах о нелинейных колебаниях.

### **1. Вынужденные колебания маятника.**

Предположим, что на маятник действует периодическая внешняя сила *F*в(*t*) = *F*0 sin ω*t* , где амплитуда силы *F*0 и частота вынужденных колебаний ω служат параметрами задачи. Исследуемый процесс будет описываться уравнением

 + *x* = *a*0 sin ω*t* ,

где *a*0 = *F*0/*m* . Это уравнение имеет частное решение

 .

Таким образом, колебание маятника при наличии периодической внешней силы осуществляется с частотой вынужденных колебаний. При этом амплитуда колебания тем больше, чем ближе частоты вынужденных и собственных колебаний. Резкое возрастание амплитуды колебаний при стремлении величины ω к ω0 называется *резонансом*.

При ω = ω0 приведенная выше формула не имеет смысла, а соответствующая задача Коши вообще не имеет решения. Однако эксперимент показывает, что при совпадении указанных частот мы получаем колебания с конечной амплитудой. Таким образом, в случае близости частоты ω к ω0 приведенное выше уравнение уже не описывает исследуемый процесс с достаточной степенью точности. Для уточнения математической модели рассматривают вынужденные колебания маятника с учетом трения, описываемые уравнением

.

Его частное решение можно искать в форме

*x*(*t*) = *a* sin (ω*t +* ϕ) ,

где



При ω = ω0 амплитуда колебания конечна и равна *а*\*=  *а*\* /ω0 . Тем самым при совпадении частот вынужденных и собственных колебаний маятника при наличии трения также наблюдается явление резонанса. В данном случае оно характеризуется тем, что в этих условиях амплитуда достигает своего максимального значения.

#### **Компьютерный эксперимент. Вынужденные колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Вынужденные колебания маятника*". Провести следующий анализ:

1. Проанализировать результаты для режима "*трение отсутствует*" для случая, когда частота вынужденных колебаний втрое больше и втрое меньше собственной частоты. Обратить внимание на график изменения со временем положения маятника и на фазовый портрет системы.

2. Провести расчеты в режиме "*трение учитывается*". Обратить внимание на поведение системы на достаточно большом интервале времени.

3. Провести расчеты с различными значениями частоты вынужденных колебаний. Построив график зависимости от нее амплитуды колебания, обнаружить явление резонанса.

### **2. Положение равновесия динамической системы.**

Отметим одно специфическое частное решение уравнения гармонического осциллятора, резко отличающееся по своим свойствам от всех прочих. При *x*0 = 0 , *x*1 = 0 из формулы (2.6) выводятся соотношения

*a* sin ϕ = 0 , *a* ω0 cos ϕ = 0 .

Отсюда следует, что *a* = 0 , а значит, решение уравнения (2.3) тождественно равно нулю. Этот любопытный результат имеет естественный физический смысл. Маятник, изначально находящийся в вертикальном положении и покоящийся, неизменно остается в этом состоянии. С математической точки зрения состояние динамической системы, не меняющееся со временем, называется *положением равновесия*. При качественном исследовании динамической системы чрезвычайно важно знать ее возможные положения равновесия, поскольку, если система все-таки выходит со временем в какое-либо состояние, то последнее непременно будет положением равновесия.

В рассматриваемом случае мы сначала выделили весь класс решений задачи, а потом обнаружили среди великого множества частных решений   
положение равновесия. Было бы очень печально, если бы для нахождения   
положения равновесия системы непременно требовалось априорное знание решения задачи. Дело в том, что нелинейные дифференциальные уравнения   
(а именно они описывают важнейшие явления природы) практически не   
поддаются аналитическому решению.

К счастью, для нахождения положений равновесия системы совсем не обязательно знать ее аналитическое решение. Действительно, обозначив через *u* угловую скорость маятника, приведем уравнение второго порядка (2.3) к эквивалентной ему системе двух дифференциальных уравнений первого   
порядка



Очевидно, положение и скорость маятника со временем не будут меняться исключительно в том случае, когда их производные равны нулю. Отсюда   
следует, что правые части приведенных выше уравнений обращаются в нуль, что и позволяет найти положение равновесие маятника.

Отметим, что положение равновесия далеко не всегда единственно.   
В частности, уравнение больших колебаний маятника (2.2) приводится к виду

 .

Приравнив**а**я нулю правые части этих уравнений, находим значения *x* = *k*π ,   
*u* = 0 . Таким образом, любому целому числу *k* соответствует свое положение равновесие. Этот поразительный результат показывает, что при анализе нелинейных систем могут возникнуть существенные сложности и поразительные эффекты. Тем не менее, именно нелинейность окружающего нас мира наделяет его потрясающими, удивительными и неповторимыми свойствами. Жить в линейном мире было бы невообразимо скучно, не говоря уже о том, что сама по себе жизнь ассоциируется исключительно с нелинейными системами.

Положения равновесия могут существенно различаться своими свойствами. В случае *асимптотически устойчивого положения равновесия*малое отклонение системы от этого состояния приводит к непременному возвращению в это состояние. Примером такого положения равновесия является нулевое состояние для колебания маятника с учетом трения. Для *неустойчивого положения равновесия* ситуация существенно меняется. В частности, для   
нелинейных колебаний маятника верхнее вертикальное положение маятника при нулевой начальной скорости является положением равновесия, но при незначительном изменении начального состояния системы маятник выходит из этого положения. С другой стороны, маятник, имеющий какое-либо малое отклонение от нижнего вертикального положения или ненулевую начальную скорость, будет колебаться вокруг положения равновесия, но не вернется к нему окончательно (если, конечно, не учитывать рассматриваемое ниже явление трения). Таким образом, мы никак не имеем дело с асимптотически устойчивым положением равновесия. В то же время у нас есть определенная   
уверенность в том, что маятник навсегда останется в некоторой окрестности положения равновесия, а не удалится от него. В подобном случае положение равновесия называют *устойчивым по Ляпунову*.

#### **Компьютерный эксперимент. Малые колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Малые свободные колебания маятника*". Провести следующий анализ системы.

1. Задавая нулевые начальные значения положения и скорости маятника в режиме "*трение отсутствует*", убедиться, что он останется в равновесии. При этом состояние системы со временем не меняется, а соответствующая фазовая кривая вырождается в точку.

2. Задавая малые значения начального положения или начальной скорости, убедиться, что состояние системы не стремится к положению равновесия, но остается в некоторой его окрестности, что соответствует устойчивости положения равновесия по Ляпунову.

3. Убедиться, что нулевые начальные значения начального состояния системы соответствуют положению равновесия и для режима "*трение учитывается*".

4. Давая малые значения начального положения или начальной скорости в режиме "*трение учитывается*", убедиться в том, что состояние системы стремится к положению равновесия, что соответствует его асимптотической устойчивости.

#### **Компьютерный эксперимент. Нелинейные колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Нелинейные колебания маятника*". Провести следующий анализ в режиме "*трение отсутствует*".

1. Задавая нулевые начальные значения положения и скорости маятника, убедиться в том, что он останется в равновесии. При этом состояние системы со временем не меняется, а фазовая кривая вырождается в точку.

2. Задавая малые значения начального положения или начальной скорости, убедиться в том, что состояние системы не стремится к положению равновесия, но остается в некоторой его окрестности, что соответствует устойчивости положения равновесия по Ляпунову.

3. Задать начальное отклонение маятника равным 180о и нулевую   
начальную скорость. Убедиться в том, что при этих условиях маятник остается в равновесии. Наблюдать процесс рекомендуется на малом интервале времени.

4. Задавая незначительное отклонение положения маятника от указанного выше состояния равновесия, убедиться в том, что маятник покидает окрестность равновесного состояния.

### **3. Колебание пружины.**

Еще один классический пример механических колебаний дает движение пружины. Рассматривается пружина, один конец которой жестко закреплен, а к другому присоединено тело массой *m.* В естественном состоянии пружина считается неподвижной. Однако при ее сжатии или растяжении возникает сила, стремящаяся возвратить пружину в исходное положение (см. рис. 9). Движение тела на пружине описывается функцией *х = х*(*t*) , характеризующей отклонение тела от его равновесного состояния в момент времени *t*.

При малых отклонениях пружины от состояния равновесия в соответствии с *законом Гука* на тело будет действовать сила *F*, направленная в сторону равновесия и пропорциональная значению отклонения *х* (более сложный характер зависимости силы от положения используется для рассматриваемой ниже пружины Дуффинга). Таким образом, справедливо равенство *F = - kx* , где константа *k* называется *коэффициентом упругости* и является параметром задачи. Подставляя значение силы в уравнение движения , получаем





Рис. 9. Колебание пружины.

где  . Оно называется *уравнением колебания пружины* и с точностью до смысла входящих в него величин совпадает с уравнением гармонического осциллятора.

#### **Компьютерный эксперимент. Колебания пружины.**

Обр*а*титься к лабораторной работе "*Свободные колебания пружины*". Провести следующий анализ.

1. Проанализировать результаты в режиме "*трение отсутствует*".   
Обратить внимание на аналогию между колебанием пружины и маятника.

2. Провести расчеты в режиме "*трение учитывается*".

3. Проверить изменение со временем кинетической, потенциальной и полной энергии.

### **4. Большие колебания маятника при наличии трения.**

Для больших колебаний маятника при наличии трения уравнение   
движения по аналогии с соотношениями (2.2) и (2.10) имеет вид



В отсутствии трения (при *k* = 0) при малых начальных данных оно аппроксимируется классическим уравнением гармонического осциллятора, и маятник совершает колебания вокруг положения равновесия *х* = 0 . При достаточно больших начальных данных наблюдается круговое вращение маятника с   
постоянным ростом угла и периодическим изменением скорости вращения. Учет трения приводит к постепенному замедлению вращения маятника с   
последующим переходу на режим затухающих колебаний.

#### **Компьютерный эксперимент. Нелинейные колебания.**

Обратиться к лабораторной работе "*Нелинейные колебания маятника*". Провести следующий анализ в режиме "*трение учитывается*".

1. Проанализировать результаты для сравнительно небольших начальных состояний системы.

2. Для достаточно больших начальных состояний обнаружить переход от вращения маятника к затухающим колебаниям.

### **5. Маятник Фруда.**

Еще один пример нелинейных колебаний дает маятник Фруда, в   
котором принята следующая зависимость силы трения от угловой скорости:

 ,

где *a* и *b* – положительные константы. В результате для больших колебаний при наличии внешней силы *f* получаем уравнение

.

Движение маятника Фруда имеет существенно более сложный характер по сравнению с большими колебаниями обычного маятника.

### **6. Маятник с силой, направленной в сторону движения.**

Малые колебания маятника при наличии трения и внешней силы, которая всегда направлена в сторону движения, описывается уравнением

 .

Оказывается, что при любых начальных данных маятник выходит на колебания с одной и той же амплитудой

 ,

где *h = k/*2*mL* ,  – полупериод колебания. Это явление связано с понятиями *предельного цикла* и *автоколебаний*, о которых пойдет речь в последующих лекциях.

### **7. Пружина Дуффинга.**

Если сила упругости пружины является нелинейной функцией отклонения пружины от состояния равновесия, то уравнение колебания пружины становится существенно более сложным. В частности, при *F = -*(*ax + bx*3) ,   
где *a* и *b* – некоторые положительные константы, рассматриваемый процесс описывается уравнением Дуффинга

 .

Можно установить, что в зависимости от значений входящих в него коэффициентов решение уравнения обладает весьма специфическими свойствами.

В последующей лекции будут рассмотрены простейшие колебательные процессы электрической природы, которые описываются практически такими же уравнениями, что и изучаемые в данной   
лекции механические колебания.

# Лекция № 3 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В природе существует внутренняя присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов.

Герман ВЕЙЛЬ

В предшествующей лекции рассматривались колебания некоторых классов механических систем. Характерно, что, хотя маятник движется под действием силы тяготения, а пружина – силы упругости, оба явления описываются одним и тем же уравнением гармонического осциллятора. Это обстоятельство наводит на мысль, что, возможно, и другие типы колебаний приводят к той же модели.

В настоящей лекции исследуются процессы, связанные с электрическим контуром – замкнутой электрической цепью, состоящей из конденсатора и катушки индуктивности. Изучаемое явление характеризуется уравнениями относительно силы тока и заряда на конденсаторе, которые в точности совпадают с уравнением гармонического осциллятора. Аналогом трения для электрических колебаний оказывается сопротивление. Присутствие в цепи внешнего источника напряжения, меняющегося периодически, приводит к вынужденным колебаниям контура, поразительно напоминающим соответствующие механические колебания. В приложении приводится один пример нелинейных электрических колебаний.

## 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КОНТУР

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности, соединенных проводами (см. рис. 10). Исследуемый объект называется *электрическим контуром*. Можно убедиться, что по ходу процесса со временем меняются *заряд* *q*, *сила тока* *I* и *напряжение* (разность потенциалов) *V* в цепи, которые и выбираются в качестве функций состояния системы. Контур понимается как сосредоточенный объект (в отличие от рассматриваемого впоследствии электрического провода), т.е. его характеристики меняются исключительно со временем.



Рис. 10. Электрический контур.

Отметим, что разность потенциалов между точками *А* и *В* на рис. 10 через катушку и через конденсатор совпадают. Разность потенциалов через катушку (напряжение на индуктивности) *V*1 пропорциональна скорости изменения силы тока и направлена таким образом, чтобы препятствовать изменению силы тока. В результате получаем равенство

*V*1 = *L*,

где коэффициент пропорциональности *L* называется *индуктивностью* или коэффициентом самоиндукции) и является параметром процесса. Разность потенциалов на конденсаторе (напряжение на конденсаторе) *V*2 , пропорциональна его заряду *q*1

 ,

где параметр *С* называется *электрической емкостью*. Баланс напряжений в цепи характеризуется соотношением

*V* = *V*1 = *V*2 ,

согласно которому напряжение в цепи равно напряжению на катушке и на конденсаторе.

Установим теперь баланс зарядов. Сила тока представляет   
собой скорость изменения заряда, взятую с противоположным знаком (направления тока и движения электрических зарядов почему-то принято считать противоположными). Таким образом, справедливо равенство

.

В рассматриваемом случае заряд в цепи характеризуется исключительно зарядом на конденсаторе, что приводит к равенству

*q* =  *q*1 = *q*2 .

Пользуясь полученными соотношениями, установим следующую связь между силой тока, зарядом и напряжением в цепи:

 . (3.1)

Разрешая систему (3.1) относительно неизвестных функций, получаем уравнения второго порядка

 , (3.2)

 , (3.3)

 , (3.4)

где .

Не может не удивлять тот факт, что полученные соотношения с точностью до обозначений совпадают с уравнениями колебания маятника или пружины. В этой связи за параметром ω0 сохраняется наименование частоты (электрических) колебаний. Более полное сравнение процессов механических и электрических колебаний приводится в таблице 4.

Как известно, уравнение гармонического осциллятора имеет   
периодическое решение с частотой ω0 и периодом *T* = 2π/ω0 . В частности, справедливо равенство

*q*(*t*) = *a* sin(ω0 *t* + ϕ) ,

где амплитуда *а* и фаза ϕ находятся с помощью начальных условий. Аналогичным соотношениям удовлетворяют сила тока и напряжение. Здесь проявляется поразительная особенность математических моделей. Установив совпадение уравнений механических и электрических колебаний и зная решение уравнения гармонического осциллятора, мы избавлены от необходимости повторять долгую и скучную (да простят меня коллеги математики) процедуру поиска решения и можем сразу записать готовую формулу.

Обратимся к интерпретации полученных результатов. Предположим, что в начальный момент времени на конденсаторе имеется   
некоторый заряд, а ток в цепи отсутствует (см. рис. 11 а). Тогда имеется напряжение на конденсаторе, а значит, и на индуктивности. Вследствие этого конденсатор начинает разряжаться. Вследствие этого   
появляется поток зарядов, т.е. по цепи течет ток (рис. 11 б). В момент времени *t* = *T*/4 сила тока достигает максимального значения, а   
конденсатор полностью разряжается (рис. 11 в). В соответствии с   
соотношениями (3.1) начинается перезарядка конденсатора, по ходу которой уменьшается сила тока через катушку (рис. 11 г). При *t* = *Т*/2 заряд конденсатора достигает максимального значения, с точностью до знака совпадающий с первоначальным. В это время сила тока равна нулю (рис. 11 д). Затем конденсатор разряжается, а по цепи течет ток в направлении, противоположном предшествующему (рис. 11 е). При   
*t* = 3*T*/4 заряд конденсатора равен нулю, а сила тока достигает максимального значения (рис. 11 ж). Затем начинается перезарядка конденсатора с уменьшением силы тока (рис. 11 з), а при *t = Т*  мы возвращаемся к первоначальному состоянию (рис. 11 и). Далее процесс возобновляется.



Рис. 11. Электрические колебания в контуре.

Табл. 4. Сравнение электрических и механических колебаний.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | электрические колебания (контур) | | механические колебания (пружина) | |
| 1 | заряд | *q* | отклонение | *x* |
| 2 | ток |  | скорость | *v =* |
| 3 | напряжение | *V* | сила | *F* |
| 4 | индуктивность | *L* | масса | *m* |
| 5 | обратная емкость | 1*/C* | коэффициент упругости | *k* |
| 6 | сопротивление | *R* | коэффициент трения | *z* |
| 7 | напряжение  на индуктивности |  | сила инерции | *F*1 *= -m* |
| 8 | напряжение на катушке |  | сила упругости | *F*3 *= k x* |
| 9 | напряжение  на сопротивлении | *V*2 *= R I* | сила трения | *F*2 *= - z v* |
| 10 | баланс напряжений | *V*1 *+ V*3 *= V*2 | баланс сил | *F*1*+ F*3 *= F*2 |
| 11 | время релаксации | τ *= L/R* | время релаксации | τ *= m/z* |
| 12 | частота колебаний |  | частота колебаний |  |
| 13 | источник напряжения | *V\** | внешняя сила | *F\** |
| 14 | уравнение колебаний |  | уравнение колебаний |  |
| 15 | электрическая энергия |  | потенциальная энергия |  |
| 16 | магнитная энергия |  | кинетическая энергия |  |
| 17 | закон сохранения энергии | *Е + М =* const | закон сохранения энергии | *U + K =* const |

#### **Компьютерный эксперимент. Электрический контур.**

Обратиться к лабораторной работе "*Электрический контур*". Провести следующий анализ в режиме "*сопротивление отсутствует*":

1. На основе выводимой информации убедиться в том, что сила тока,   
заряд и напряжение в цепи меняется со временем периодически.

2. Обратить внимание на то, что в фазовой плоскости такому движению соответствует замкнутая кривая (эллипс).

3. Обратить внимание на аналогию между колебаниями контура, маятника и пружины.

4. Оценить влияние емкости и индуктивности на процесс электрических колебаний.

## 2. ЭНЕРГИЯ КОНТУРА

Установив несомненную аналогию между электрическими и механическими колебаниями и зная, что колебания маятника и пружины могут быть описаны в терминах энергий, можно попытаться записать закон сохранения энергии электрического контура. Рассмотрим уравнение (3.3), записываемое в следующем виде

 .

Умножая это равенство на производную от *q*, получаем соотношение

 .

Учитывая связь между током и зарядом, преобразуем последнее равенство к следующему виду

 .

В**ы**ражения

*M = L I* 2 /2 , *E = q*2 / 2*C* ,

называются соответственно, *магнитной* и *электрической энергиями* контура. Таким образом, предшествующее соотношение может быть записано в виде

*M*(*t*) *+ E*(*t*) *=* const .

Таким образом, сумма электрической и магнитной энергии контура со временем не меняется. Следовательно, последнее равенство выражает *закон сохранения энергии* контура.

Обратимся теперь к интерпретации процессов, изображенных на рис. 11, с позиций закона сохранения энергии. Начальное состояние системы характеризуется заряженным конденсатором при отсутствии тока (см. рис. 11 а). Это означает, что магнитная энергия контура равна нулю, в то время как его электрическая энергия принимает некоторое значение, определяемое начальным зарядом контура. По мере разрядки конденсатора в цепи проявляется ток (рис. 11 б). Уменьшение заряда на конденсаторе означает снижение электрической энергии. Однако переменное электрическое поле генерирует на катушке индуктивности магнитное поле. Таким образом, электрическая энергия начинает переходить в магнитную, причем суммарная энергия остается неизменной.

Наступает момент времени, когда конденсатор полностью разрядился, а в цепи наблюдается максимальное значение силы тока (рис. 11 в). Это означает, что электрическая энергия полностью перешла в магнитную. Переменное магнитное поле на индуктивности генерирует электрическое поле в соответствии с *законом Фарадея*. Тем самым начинается процесс перезарядки конденсатора, в соответствии с котором заряд на конденсатора возрастает, а так в цепи – падает (рис. 11 г). Наблюдается переход магнитной энергии в электрическую. Со временем заряд конденсатора достигнет максимального значения, отличающегося от начального только знаком. При этом ток в цепи отсутствует, а значит, вся магнитная энергия перешла в электрическую.

Следующие полпериода соответствуют очередной перезарядке конденсатора. Полученные результаты аналогичны проявлению закона сохранения энергии для незатухающих колебаний маятника и пружины.

#### **Компьютерный эксперимент. Энергия колебания контура.**

Обратиться к лабораторной работе "*Электрический контур*". Провести следующий анализ в режиме "*сопротивление отсутствует*":

1. Вы*в*ести на экран графики изменения электрической и магнитной энергий контура.

2. На основе графика зависимости полной энергии системы от времени убедиться в справедливости закона сохранения энергии.

3. Обратить внимание на аналогию между колебаниями контура, маятника и пружины.

## 3. КОНТУР С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Рассмотренные свойства электрического контура аналогичны свободным незатухающим колебаниям маятника или пружины. Логично предположить, что существует естественный электрический аналог механических колебаний при наличии трения (см. табл. 4). Предположим, что контур включает в себя еще и электрическое сопротивление (см. рис. 12). В этом случае для записи баланса напряжений между точками *А* и *В* надо учитывать еще и падение напряжения на сопротивлении. В соответствии с законом Ома оно пропорционально величине силы тока *V*3 = *R I* , где коэффициент *R* – параметр задачи, называемый электрическим *сопротивлением*. Тогда получаем следующий баланс напряжений

*V*1 *+ V*3 *= V*2 .

При сделанных предположениях математическая модель характеризуется соотношениями

.

Разделяя переменные, приходим к следующим дифференциальным уравнениям относительно силы тока, заряда и напряжения в цепи:

 ,

 ,

 ,

где параметр τ = *L*/*R* (как и в случае механических колебаний) называют временем релаксации.



Рис. 12. Контур с сопротивлением.

Полученные соотношения поразительно совпадают с уравнениями колебаний маятника или пружины при наличии трения. Мы окончательно убеждаемся в том, что электрическое сопротивление действительно играет роль трения. Повторяя рассуждения из предшествующей лекции, заключаем, что при достаточно большом времени релаксации (т.е. при сравнительно большой индуктивности и малом сопротивлении) в контуре наблюдаются затухающие колебания тока, заряда и напряжения. При малом значении времени релаксации колебания отсутствуют, а все рассматриваемые характеристики монотонно стремятся к нулю.

#### **Компьютерный эксперимент. Контур с сопротивлением.**

Обратиться к лабораторной работе "*Электрический контур*". Провести следующий анализ в режиме "*сопротивление учитывается*".

1. Убедиться в том, что в контуре наблюдаются затухающие колебания электрические колебания. При этом фазовая кривая представляет собой закручивающуюся спираль.

2. При достаточно больших значениях сопротивления получить монотонное затухание электрических колебаний.

3. Обратить внимание на аналогию между затухающими колебаниями маятника, пружины и контура.

## 4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНТУРА

Рассмотрим процессы, происходящие в электрическом контуре при наличии внешнего источника напряжения. Предположим, что это напряжение меняется периодически по закону *V*\*(*t*) = *V*0 sin ω*t* , где амплитуда напряжения *V*0 и частота вынужденных колебаний ω являются параметрами задачи. При отсутствии электрического сопротивления исследуемый процесс будет описываться уравнением

 + *I* = *a*0 sin ω*t* , (3.5)

где *a*0 = *V*0/*L* .

Решение уравнения (3.5) с соответствующими начальными условиями при определенных значениях параметров системы изображено на рис. 13. Как видно из графика, результат оказывается суперпозицией двух типов колебаний собственных, обусловленных внутренними свойствами контура, и вынужденных, определяемых действиями внешнего источника напряжения.

Особый интерес представляет частное решение уравнения (3.5), имеющее вид *I*(*t*) = *A* sin ω*t* . Подставляя это значение в равенство (3.5), установим соотношение

.

Отсюда находим амплитуду силы тока

 .

Таким образом, сила тока будет меняться с частотой вынужденных колебаний по формуле

 . (3.6)

Она соответствует решению уравнения (3.5) с начальными условиями



Как видно из формулы (3.6), амплитуда колебания резко возрастает по мере приближения частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний. Подобное явление, называемое *резонансом*, действительно наблюдается экспериментально. Однако отметим одно весьма важное обстоятельство. При ω = ω0 формула (3.6) не имеет смысла, а соответствующее уравнение с указанными начальными условиями, страшно подумать, вообще не имеет решения. В то же время эксперимент показывает, что, полагая частоту вынужденных колебаний равной собственной частоте ω0 , мы получаем колебания с достаточно большой, но, безусловно, конечной амплитудой. Это говорит о том, что в случае близости величины ω к ω0 уравнение (3.5) уже не может достаточно точно описывать исследуемый процесс.

С целью уточнения математической модели рассмотрим вынужденные электрические колебания при наличии сопротивления, описываемые уравнением

 *a*0 sin ω*t* . (3.7)

Решение соответствующей задачи Коши изображено на рис. 14.

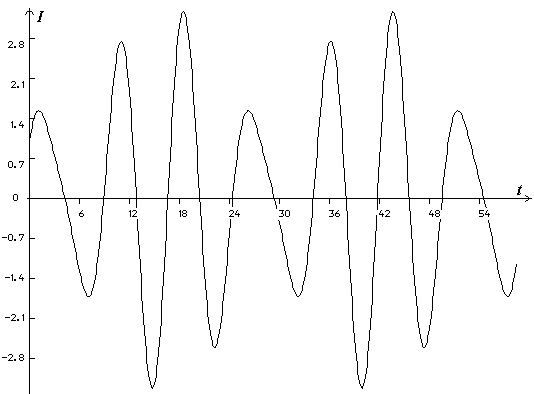


Рис. 13. Изменение силы тока в случае вынужденных колебаний контура  
при *L* = 1 , *C* = 1 ,  *q*0 = 0 , *I*0= 1 , *a*0 = 1 , ω = 0.75.

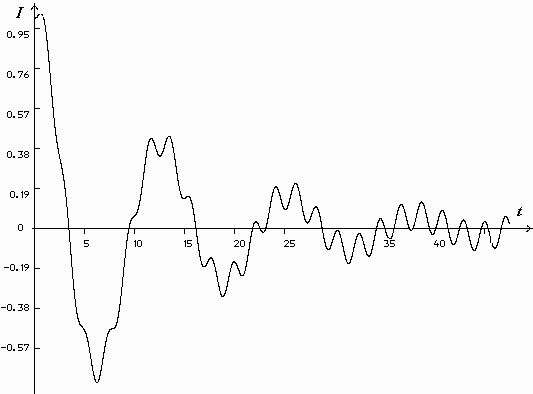


Рис. 14. Изменение силы тока для вынужденных колебаний контура   
при наличии сопротивления для значений параметров  
*L* = 2 , *C* = 2 , *R* = 0.2 , *q*0 = 0.5 , *I*0= 1 , *a*0 = 0.05 , ω = 3 .

Сравнивая полученный результат с предшествующим графиком, обращаем внимание на влияние трения, являющегося причиной затухания колебаний. Рассмотрим частное решение имеющегося уравнения, определяемое по формуле *I*(*t*) = *A* sin (ω*t* + ϕ). Тогда соотношение (3.7) приводится к виду

*A*sin(ω*t* + ϕ) + *A*ω τ -1 cos(ω*t* + ϕ) = *a*0 sin ω*t* .

Пользуясь равенствами

sin(ω*t* + ϕ) = sin ω*t* cos ϕ + cos ω*t* sin ϕ ,   
cos(ω*t* + ϕ) = cos ω*t* cos ϕ – sin ω*t* sin ϕ ,

будем иметь

[**cos ϕ - ω τ -1 sin ϕ] *A* sin ω*t* +

+ [**sin ϕ + ω τ -1 cos ϕ] *A* cos ω*t = a*0 sin ω*t* .

В результате находим значения



Учитывая связь между тригонометрическими функциями, определяем



Таким образом, частота вынужденных колебаний равна



Зависимость амплитуды колебания тока от частоты вынужденных колебаний изображена на рис. 15. Очевидно, максимальная амплитуда наблюдается при ω = ω0 и равна

 .

Мы вновь имеем дело с явлением резонанса.

При неограниченном возрастании времени релаксации мы возвращаемся к колебанию контура в отсутствии сопротивления.



Рис. 15. Зависимость амплитуды колебания тока  
при наличии сопротивления от частоты вынужденных колебаний.

#### **Компьютерный эксперимент. Вынужденные колебания контура.**

Обратиться к лабораторной работе "*Вынужденные колебания контура*". Провести следующий анализ:

1. Проанализировать результаты в режиме "*сопротивление отсутствует*" для различных значений частоты вынужденных колебаний. В качестве параметров процесса рекомендуется выбрать те, которые приведены на рис. 13.

2. Провести расчеты в режиме "*сопротивление учитывается*". В качестве параметров процесса рекомендуется выбрать те, которые приведены на рис. 14.

3. Обратить внимание на аналогию между затухающими колебаниями маятника, пружины и контура.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку между электрическими и механическими колебаниями существует явная аналогия (см. табл. 4), полученные выше результаты остаются в силе и для вынужденных механических колебаний. Мы рассмотрим также один пример нелинейных электрических колебаний, близкий к задачам, рассмотренным в приложении к предшествующей лекции.

### **1. Вынужденные колебания маятника.**

Как мы уже знаем, колебания маятника при отсутствии трения и действии периодической внешней силе описывается уравнением



совпадающим с (3.6). Тогда по аналогии с формулой (3.7) можно найти его частное решение

.

Отметим, что амплитуда колебания неограниченно возрастает по мере приближения частота вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний.

Более точные результаты получаются при учете влияния трения. В этом случае исследуемый процесс будет описываться уравнением



Его частное решение можно искать в форме

*x*(*t*) = *a* sin(ω*t +* ϕ) .

Повторяя приведенные выше рассуждения, находим фазу и амплитуду колебаний маятника

 .

При ω = ω0 амплитуда колебания конечна и равна

 .

Мы вновь имеем дело с резонансом, который можно охарактеризовать с помощью рис. 15.

### **2. Вынужденные колебания пружины.**

Как уже отмечалось, существует явно выраженная аналогия между колебаниями пружины и маятника. В этой связи все сделанные выше замечания остаются в силе и для пружины, на которую действует периодически меняющаяся внешняя сила.

На рис. 16 изображена некоторая фазовая кривая для вынужденных колебаний пружины, которая оказывается замкнутой, т.е. мы имеем дело с периодическим решением. Полученный результат соответствует суперпозиции собственных и вынужденных колебаний. Для рассматриваемого случая частоты вынужденных и собственных колебаний равны соответственно 0.75 и 1, что позволяет найти периоды *Т* = 4/3 2π и *Т*0 = 2π . Тогда период колебания пружины будет равен наименьшему общему кратному этих величин, т.е. 8π .

Если частоты собственных и вынужденных колебаний оказываются несоизмеримыми величинами, то фазовые кривые системы не могут быть замкнутыми линиями, а решению задачи не соответствует ни одна периодическая функция. Тем не менее, движение пружины остается достаточно регулярным.

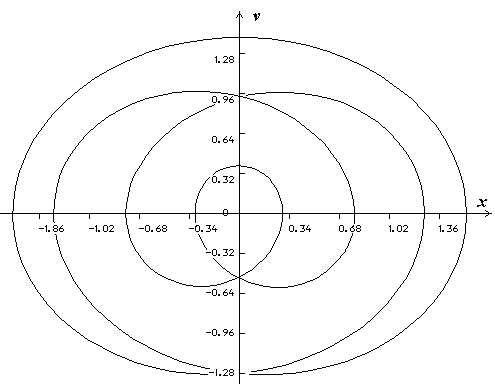


Рис. 16. Фазовая кривая для вынужденных колебаний пружины  
при *x*0= 0.8 , *v*0 = 0 , *a*0= 0.3 , ω0 = 1 , ω = 0.75 .

В частности, максимумы ее отклонения от положения равновесия со временем не меняется. В этом случае мы имеем дело с *квазипериодическими колебаниями*.

#### **Компьютерный эксперимент. Вынужденные колебания пружины.**

Обратиться к лабораторной работе "*Вынужденные колебания пружины*". Провести следующий анализ.

1. Проанализировать результаты в режиме "*трение отсутствует*" для значений всех параметров, указанных на рис. 16.

2. Провести расчеты, увеличив и уменьшив значение частоты вынужденных колебаний в целое число раз.

3. Задавая несоизмеримым значения частот вынужденных и собственных колебаний, обнаружить квазипериодические колебания.

4. Провести расчеты в режиме "*трение учитывается*".

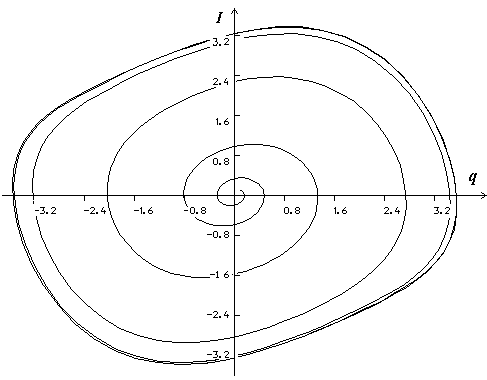


Рис. 17. Фазовая кривая для уравнения Ван дер Поля.

### **3. Контур Ван дер Поля.**

Как и в механических задачах представляют интерес нелинейные электрические колебания. Пример таких колебания дает контур Ван дер Поля, который включает в себя источник напряжения, действующий как отрицательное сопротивление. Рассматриваемый процесс описывается нелинейным *уравнением Ван дер Поля*

 ,

где положительные константы β и γ являются параметрами задачи.

При определенных значениях этих коэффициентах в контуре Ван дер Поля наблюдаются колебания, существенно отличающиеся от рассмотренных ранее. В этом случае в фазовой плоскости существует некоторая замкнутая фазовая кривая. Казалось бы, с аналогичной ситуацией мы уже сталкивались при рассмотрении незатухающих колебаний маятника, пружины или контура. Это характерно для положений равновесия, называемых центром, с которыми мы еще неоднократно встретимся в последующих лекциях. Однако вся прелесть ситуации состоит в том, что в предшествующих случаях существует бесконечное множество замкнутых фазовых кривых, тогда как здесь речь идет о единственной кривой такого рода. Другие фазовые кривые, проходящие вблизи рассматриваемой, "наматываются" на нее изнутри (см. рис. 17) или снаружи. Фазовая кривая, обладающая подобным свойством, называется *предельным циклом* (точнее, устойчивым предельным циклом). Отметим, что со временем вне зависимости от начального состояния система выходит на колебания одной и той же амплитуды. В то же время для колебаний, связанных положением равновесия "центр", амплитуда колебаний определяется начальным состоянием системы. Описываемый тип колебаний называют также *автоколебаниями*.

Итак, фазовые кривые со временем могут выходить как на положения равновесия, так и на предельные циклы. Тем самым мы можем встретиться с двумя классами предельных состояний динамической системы, называемых *аттракторами*.

## КОММЕНТАРИИ к лекциям 2 - 3

Различные аспекты классической теории механических колебаний рассматриваются, например, в книгах Н.Н. Бухгольца [15], Ч. Киттеля, У. Найта и М. Рудермана [44], Ф. Крауфорда [52], Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [60],   
Л.И. Мандельштама [74], Г. Пейна [101], Дж. Пирса [105], С.Э. Хайкина [137]. Вопросы компьютерного моделирования таких задач описываются в книге Х. Гулда и Я. Тобочника [27].

Вопросы теории электрических колебаний описываются в книгах   
Ч. Киттеля, У. Найта и М. Рудермана [44], Л.И. Мандельштама [74], Э. Парселла [100], Г. Пейна [101]. Вопросы компьютерного моделирования таких задач рассматриваются в [27], [48]. Уравнение Ван дер Поля исследуется, например, в книге Ф. Муна [95].

С нелинейными колебаниями, близкими к рассмотренным выше, мы еще встретимся при исследовании химических, биологических и других процессов. С общей теорией нелинейных колебаний можно ознакомиться в книгах   
А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина [4], Ф. Муна [95], Г. Пейна [101], где исследуются, в частности, пружина Дуффинга, маятник Фруда и контур Ван дер Поля.

Нелинейные колебания, имеющие химическую, биологическую и другую природу будут рассмотрены в последующих лекциях. Во второй части курса будут рассмотрены электрические колебания в проводе, обобщающие процессы колебания контура и описываемые уравнениями с частными производными.

Движение маятника и пружины обусловлено действием сил совершенно разной природы (гравитация и сила упругости, имеющая электромагнитную природу). И, тем не менее, эти процессы описываются абсолютно одинаковыми уравнениями. Еще большее удивление вызывает тот факт, что и электрические колебания также характеризуются уравнением гармонического осциллятора. Между этими процессами выявляется слишком много общего, чтобы это можно было списать на случайное совпадение. С подобной поразительной ситуацией мы еще не один раз столкнемся в дальнейшем.

Различные проблемы, связанные с явлением трения, описываются в книге Н.М. Михина [90].

При описании движения тела под действием силы трения отмечалось, что все слагаемых, входящие в уравнение состояния должны иметь одинаковую размерность. Это естественное требование должно непременно выполняться для математических моделей любых явлений.

Как и в случае маятника, можно рассмотреть колебание пружины при наличии трения, а также ее вынужденные колебания. Некоторые качественные свойства уравнения колебания маятника будут рассмотрены в лекции № 4. В лекции № 12 будет исследоваться колебание струны, которую можно законно интерпретировать как распределенный (имеющий некоторые линейные размеры) аналог пружины.

Методы исследования линейных дифференциальных уравнений достаточно хорошо разработаны (см., например, [5], [49], [67], [140], [151]). Задача существенно усложняется при переходе к нелинейным системам, к которым, как мы вскоре убедимся, сводятся подавляющее большинство явлений окружающего мира.

При компьютерной реализации рассматриваемых задач используются понятия фазовой плоскости, фазовой кривой и т.д., определение которых будет дано в лекции № 4. Для процесса колебания маятника фазовая плоскость образуется координатными осями, соответствующими его положению и скорости. В любой момент времени маятник имеет определенные значения этих величин, характеризующие конкретную точку на фазовой плоскости. Меняя время, мы получаем некоторую линию, называемую фазовой кривой. Очевидно, положению равновесия соответствует особая фазовая кривая, состоящая из единственной точки, а периодическому решению – замкнутая фазовая кривая.

Положение равновесия маятника классифицируется как *центр*. В последующих лекциях мы еще встретимся с понятием центра при рассмотрении уравнений Вольтерра – Лотки, имеющих чрезвычайно разнообразные интерпретации. Положение равновесия для уравнения (2.10) характеризуется нулевой скоростью. В то же время координата *х*, соответствующая положению равновесия, может оказаться произвольной. Любому начальному положению и начальной скорости тела (а также времени релаксации) соответствует свое предельное значение *x*\* , определяющее положение равновесия. Таким образом, в данном случае система имеет бесконечное (и даже не счетное) множество положений равновесия. В дальнейшем мы еще неоднократно будем возвращаться к исследованию положений равновесия всевозможных динамических систем.

Последующая лекция будет посвящена некоторым вопросам качественной теории динамических систем, где будут раскрыты многие упомянутые выше понятия.

# Лекция № 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Строгость лишь освящает то, что завоевано интуицией.

Жак АДАМАР

Большая часть рассматриваемых в настоящем курсе математических моделей связана с эволюционными процессами. В этой связи для лучшего восприятия использованного математического аппарата было бы совсем неплохо посвятить одну лекцию обзору основных характеристик общей теории динамических систем.

Важнейшим из вводимых понятий будут фазовое пространство, фазовая кривая, интегральная кривая, положение равновесия, его устойчивость и предельный цикл. Фазовое пространство представляет собой множество всевозможных значений функций состояния. Любая точка в нем характеризует некоторое состояние системы. В процессе эволюции системы мы наблюдаем движение точки в фазовом пространстве. Соответствующая траектория движения называется фазовой кривой. График зависимости функций состояния от времени называется интегральной кривой.

Если состояние системы со временем не меняется, то мы находимся в положении равновесия. Таким образом, положение равновесия представляет собой стационарное решение соответствующих дифференциальных уравнений. Если отклонение системы от положения равновесия приводит к ее возвращению в исходное состояние, то положение равновесия считается устойчивым. Определив положения равновесия конкретной динамической системы и исследуя ее поведение в окрестности этих положений, можно предсказать эволюцию системы при тех или иных параметрах процесса. Иногда система со временем выходит на некоторый колебательный режим, которому соответствует замкнутая фазовая кривая. В этом случае мы имеем дело с предельным циклом. Отдельные примеры предельных циклов приведены в приложении.

## 1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Во всех рассмотренных ранее явлениях (и в большинстве из тех, к которым мы обратимся впоследствии) состояние системы меняется со временем. Таким образом, объектами нашего исследования были *эволюционные процессы*или*динамические системы*.Дадим их простейшую классификацию.

Процесс (или система) называется *детерминированным*, если всё его развитие, как в будущем, так и в прошлом, однозначно определяется состоянием системы в начальный момент времени (и, естественно, законом эволюции системы). Так, в задачах классической механики, зная начальное положение и начальную скорость материальной точки и имея уравнения движения, можно предсказать ее дальнейшее движение и полностью восстановить предысторию системы. В то же время при изучении теплопроводности или диффузии мы в состоянии рассчитать будущее, но никак не прошлое системы. Эти явления сопровождаются возрастанием энтропии и не обратимы во времени. В задачах квантовой механики приходится иметь дело с процессами, которые не детерминированы в принципе. Так, из соотношения неопределенностей Гейзенберга следует принципиальная невозможность одновременного нахождения со сколь угодно большой степенью точности координаты и импульса частицы.

Процесс называется *конечномерным*, если для полного описания рассматриваемого явления достаточно указать конечное число функций состояния. Здесь используется также термин "*система с сосредоточенными параметрами*". В частности, механическая система, состоящая из *n* материальных точек, описывается 6*n* функциями состояния. Каждой материальной точке соответствуют три ее координаты в пространстве и три составляющие вектора скорости. Все рассмотренные ранее эволюционные процессы были конечномерными. С *бесконечномерными процессами*или *системами с распределенными параметрами*связаны движение потока жидкости, распространение электромагнитных волн, перенос тепла. Эти явления нельзя с достаточной степенью точности описать с помощью конечного числа   
меняющихся во времени характеристик.

Процесс называется *дифференцируемым*, если все описывающие его функции состояния являются непрерывно дифференцируемыми функциями независимых переменных. Таким свойством обладали все рассматриваемые в настоящем курсе явления. В то же время распространению ударной волны и броуновскому движению частицы соответствуют недифференцируемые процессы.

*Теория обыкновенных дифференциальных уравнений является математическим аппаратом для изучения детерминированных   
конечномерных дифференцируемых эволюционных процессов*. Определим важнейшие понятия этой теории.

## 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим некоторый эволюционный процесс. Множество всевозможных значений его функций состояния называется *фазовым пространством*. Так, движению материальной точки на прямой соответствует фазовое пространство, представляющее собой плоскость, т.е. двумерное евклидово пространство **R2**. Это пространство называют также *фазовой плоскостью*. При описании движения системы *n*материальных точек в классической механике получаем евклидово пространство **R6*n***размерности 6*n*. Естественно, фазовое пространство конечномерного процесса (системы с сосредоточенными параметрами) конечномерно, а бесконечномерного процесса (системы с распределенными параметрами) бесконечномерно.

Пусть *M* есть фазовое пространство эволюционного процесса, а некоторый элемент *х* из *М* является его начальным состоянием (состоянием в момент времени *t* = 0). Обозначим через Λ*t x* состояние этой системы в момент времени *t*. Если рассматриваемый процесс является детерминированным, то состояние Λ*t**x* определяется однозначно как для положительных, так и для отрицательных значений параметра *t*. Таким образом, для любого действительного значения *t*, т.е. при *t*∈**R** можно задать отображение Λ*t* : *М* → *М* множества *М* в себя, которое сопоставляет любому начальному состоянию системы *х* ее состояние Λ*t x* в момент времени *t*.

Установим некоторые свойства оператора Λ*t* . Очевидно, Λ0 *x* есть состояние системы в момент времени *t* = 0 , т.е. справедливо равенство Λ0 *x* = *x* для любого начального состояния *x*. Это означает, что Λ0 является *единичным оператором* в фазовом пространстве *M*. Пусть для некоторого значения параметра *s* справедливо равенство   
*y* = Λ*s x*. Обозначим через *z* состояние системы Λ*t y* для некоторого значения *t*∈**R**. Тогда всостояние *z* система перейдет из начального состояния *x* за время *t* + *s* (см. рис. 18). Тем самым на множестве {Λ*t*} всевозможных преобразований указанного вида можно ввести *операцию*, обозначенную через •, в соответствии с равенством

Λ*t* • Λ*s* = Λ*t+s*∀ *t* , *s*∈**R** .

Введенная операция обладает следующими любопытными свойствами:

1) Λ*t* • (Λ*s* • Λ*r*) = (Λ*t* • Λ*s* ) • Λ*r* ∀ *t* , *s* , *r* ∈ **R** ;

2) Λ0 • Λ*t*  = Λ*t* • Λ0 = Λ*t* ∀ *t*∈**R** ;

3) Λ*t* • Λ-*t* = Λ-*t* • Λ*t* = Λ0 ∀ *t*∈**R** .



Рис. 18. Эволюция процесса.

Множество произвольной природы с операцией, обладающей указанными тремя свойствами (ассоциативность, существование единичного элемента, существование обратного элемента), называется *группой*. В частности, множество всевозможных преобразований {Λ*t*} с операцией • называют *динамической группой**преобразований*. Пара (*M*,{Λ*t*}) , включающая в себя фазовое пространство *M* и динамическую группу преобразований {Λ*t*} , называется *фазовым потоком*. Определим некоторые его характеристики.

Для любой точки *x*∈*М* отображение ϕ : **R** → *M* , определяемое равенством ϕ(*t*) = Λ*t* *x* ∀ *t*∈**R** , называется *движением*точки *x*. Движение конечномерного процесса представляет собой вектор-функцию, компонентами которой являются функции состояния системы при данном начальном состоянии. Множество всех значений отображения ϕ, т.е. совокупность возможных состояний ϕ(*t*) при *t*∈**R** называется *фазовой кривой*,а график отображения ϕ, т.е. совокупность всевозможных пар (*t*,ϕ(*t*))– *интегральной кривой*. Интегральная кривая состоит из графиков всех функций состояния системы.

Очевидно, с течением времени эволюция системы в фазовом пространстве происходит по фазовой кривой. Отметим, что через каждую точку фазового пространства проходит ровно по одной фазовой кривой. Действительно, если бы через некоторую точку вообще не проходило ни одной фазовой кривой, то эта точка не могла бы соответствовать состоянию системы, а значит, быть элементом фазового пространства. Если же через точку проходят две фазовые кривые, то это бы означало, что имеются два варианта эволюции динамической системы при данном начальном состоянии, что противоречит условию детерминированности процесса.

Отметим один весьма специфический, но чрезвычайно важный тип фазовых кривых. Точка *x*∈*М* называется *положением равновесия*рассматриваемой системы (точнее, соответствующего фазового потока), если справедливо равенство

Λ*t x* = *х* ∀ *t*∈**R** .

Движение положения равновесия характеризуется постоянным оператором, т.е. ϕ(*t*) =*х* для всех *t*. Соответствующая фазовая кривая состоит из единственной точки *x*.

Рассмотрим фазовый поток с фазовым пространством *М* и динамической группой преобразований {Λ*t*}. Если множество *М   
n*-мерно, то для любой точки *х*∈*М* движение ϕ будет функцией *n* переменных. Если данный поток является дифференцируемым, то функция ϕ непрерывно дифференцируема. *Фазовой скоростью* потока в точке *х*∈*М* называется вектор скорости изменения движения в начальный момент времени, т.е. следующая величина (см. рис. 19)

 .

*Векторное поле* *v* на *М* ставит в соответствие любой точке *х* фазового пространства фазовую скорость *v*(*x*). Точка *х* называется *особой точкой* векторного поля, если *v*(*x*) = 0. Очевидно, для того, чтобы точка *х*∈*М* была особой точкой векторного поля, необходимо и достаточно, чтобы она была положением равновесия фазового потока. Действительно, фазовая скорость в данной точке устанавливает величину и направление скорости изменения функций состояния (т.е. движения системы). Положение равновесия со временем не меняется. Таким образом, ее фазовая скорость равна нулю.

*Основная задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в восстановлении движения фазового потока по его векторному полю*. Действительно, если задано векторное поле   
*v* **=** *v*(*x*), то мы получаем дифференциальное уравнение

** ,

решая которое, мы определяем семейство движений, соответствующих тем или иным начальным состояниям системы.



Рис. 19. Фазовая скорость.



Рис. 20. Фазовые скорости в задаче изменения численности вида.

Проиллюстрируем введенные понятия некоторыми достаточно простыми примерами.

## 3. ИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ ВИДА ПРИ ИЗБЫТКЕ ПИЩИ

Рассмотрим простейшую биологическую задачу. Исследуется изменение со временем численности биологического вида, находящегося в благоприятных условиях. Скорость изменения численности вида *х*определяется его естественным приростом ε, что приводит к дифференциальному уравнению

**. (4.1)

В данном случае фазовым пространством *М* является множество неотрицательных действительных чисел. Его размерность равна единице – числу функций состояния. Таким образом, исследуемый эволюционный процесс действительно будет конечномерным. Следовательно, для каждого состояния *х* фазовая скорость *v*(*x*) пропорциональна значению *х* (см. рис. 20).

Векторное поле *v* характеризуется равенством (см. рис. 20)

*v*(*x*) = ε *x* ∀ *х*∈*М* .

Для любого начального состояния *х*0 решение уравнения (4.1) определяется по формуле

*х*(*t*) = *x*0 exp (ε*t*) , *t*∈**R** .

Следовательно, движение точки *х*0 определяется равенством

ϕ(*t*) = Λ*t* *x*0 = *x*0 exp (ε*t*) , *t*∈**R** .

Здесь возможны два варианта. При *х*0 ≠ 0 фазовая кривая, т.е. совокупность всевозможных значений ϕ(*t*) при *t*∈**R** состоит из всех положительных чисел. Таким образом, все фазовые кривые, соответствующие ненулевому начальному состоянию, совпадают между   
собой и заполняют все множество *М* без точки *х* **=** 0. При *х*0 = 0 справедливо равенство ϕ(*t*) = 0 ∀ *t*∈**R** . Следовательно, точка *х*0 = 0 является положением равновесия исследуемой системы. Учитывая равенство *v*(*х*0) = 0 , заключаем, что она будет особой точкой векторного поля. Отметим, что в данном случае имеется всего две фазовых кривых, одна из которых соответствует положению равновесия. При этом через каждую точку фазового пространства (как и положено) проходит ровно по одной фазовой кривой. Интегральные кривые, т.е. графики функции ϕ для различных начальных состояний *х*0  изображены на рис. 21.

## 4. КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА

В лекции № 2 было показано, что малые свободные колебания маятника описываются уравнением

 , (4.2)

где *y* – угол отклонения маятника от вертикального положения, а ω– его частота собственных колебаний, определяемая длиной нити, на которой подвешен маятник.

Определим функции *x*1(*t*) = *y*(*t*) , *x*2(*t*) = *у*'(*t*) . Тогда соотношение (4.2) приводится к системе уравнений

. (4.3)

Движение маятника характеризуется двумя функциями состояния – углом отклонения *x*1 и угловой скоростью *x*2 . Соответствующее фазовое пространство представляет собой плоскость **R2** .



Рис. 21. Семейство интегральных кривых для уравнения (4.1).



Рис. 22. Фазовые кривые и фазовые скорости

для уравнения колебания маятника с единичной частотой.

Векторным полем *v*в данном случае оказывается матрица

 .

Ее действие на вектор *x* соответствует правым частям соотношений (4.3), т.е. является фазовой скоростью системы:

.

Рассматриваемое векторное поле для случая ω = 1 изображено на рис. 22 б. Если точка *x* = (*x*1, *x*2) находится в первом квадранте,   
т.е. *x*1 > 0 , *x*2 > 0 , то первая составляющая вектора фазовой скорости положительна, а вторая – отрицательна. В результате первая фазовая координата возрастает, а вторая – убывает. При достижении значения *x*2 = 0 функция *x*1 достигает своего максимума, после чего начинает убывать. Одновременное убывание переменных *x*1 и *x*2 происходит при *x*1 > 0 , *x*2 < 0 и продолжается до тех пор, пока координата *x*1 не станет равной нулю. При этом согласно второму равенству (4.3) производная от *x*2 обратится в нуль, а сама функция *x*2 достигнет своего минимума. В дальнейшем координата *x*2 начнет возрастать, а *x*1 по-прежнему убывает, причем как *x*1, так и *x*2 – отрицательны. По мере возрастания величины *x*2 , она достигает нулевого значения. В этот момент времени согласно первому равенству (4.3) производная от *x*1 обращается в нуль, а функция *x*1 достигает минимума. В дальнейшем обе координаты *x*1 и *x*2 возрастают, причем, справедливы неравенства *x*1 < 0 , *x*2 > 0 . Рано или поздно в процессе возрастания координата *x*1 обратится в нуль. При этом *x*2 принимает свое максимальное значение. Далее обе координаты оказываются положительными, и мы снова попадаем в первый квадрант. Начинается новый цикл процесса.

Очевидно, фазовые кривая (график движения) будут замкнутыми линиями, которые при ω = 1 являются концентрическими окружностями (см. рис. 22 а). Рассматриваемая система имеет единственное положение равновесия, определяемое из уравнения *v*(*x*) = 0 . Очевидно, таковым будет начало координат. Физически это означает следующее. Если маятник находится в строго вертикальном положении (угол отклонения равен нулю) и имеет при этом нулевую скорость, то в дальнейшем он так и останется в этом положении. Начало координат является единственной особой точкой векторного поля. Для любых других начальных состояний движение маятника будет проходить по замкнутым фазовым кривым, т.е. функции состояния оказываются периодическими. Действительно, ранее отмечалось, что общее решение системы (4.3) имеет вид

*xi*(*t*) = *ai* sin (ω*t* + ϕ*i*) , *i* = 1, 2 .

Конкретные значения амплитуд *a*1 и *a*2 и фаз ϕ1 и ϕ2 определяются начальными состояниями системы. Интегральные кривые для рассматриваемого процесса приведены в лекции № 3.

#### **Компьютерный эксперимент. Колебания маятника.**

Обра*т*иться к лабораторной работе "*Малые свободные колебания маятника*". Провести следующий анализ в режиме "*трение отсутствует*".

1. Обратить внимание на то, что в фазовой плоскости такому движению соответствует замкнутая кривая (эллипс). Полагая значение частоты колебания, равной единице, убедиться в том, что фазовая кривая превращается в окружность.

2. Меняя значения начального положения и начальной скорости маятника, построить различные фазовые кривые.

3. Задавая нулевые начальные значения угла отклонения и скорости маятника, убедиться, что фазовая кривая вырождается в точку.

## 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

При исследовании эволюционных процессов и соответствующих математических моделей чрезвычайно важно знать положения равновесия исследуемой системы, а также ее поведение в окрестности этих состояний. Рассмотрим дифференциальное уравнение, определяемое векторным полем *v*

** , (4.4)

Соответствующие положения равновесия представляют собой решения *x* алгебраического уравнения (точнее системы, вообще говоря,   
нелинейных алгебраических уравнений порядка, равного размерности фазового пространства)

*v*(*x*) = 0 . (4.5)

Положение равновесия системы *x***\*** называется *асимптотически**устойчивым*, если для любого начального состояния *x*0 , достаточно близкого к *x*\* решение уравнения (9.4) с начальным условием   
*x*(0) = *x*0 при *t* → ∞ стремится к *x*\*. Если *x***\*** – устойчивое положение равновесия, то все фазовые кривые, попадающие в окрестность *x***\***, заканчиваются в этой точке. Положениеравновесия*устойчиво по**Ляпунову*, если для его окрестности *U* найдется такая его окрестность *V*, что любая фазовая кривая, начинающаяся в области *V*, целиком лежит в окрестности *U*. Положение равновесия *x***\*** называют *неустойчивым*, если произвольная фазовая кривая выходит за пределы любой его окрестности.

****

Рис. 23. Устойчивость и неустойчивость положения равновесия.

Простейшей механической иллюстрацией устойчивого и неустойчивого положений равновесия может служить шарик, расположенный в яме и на горе (см. рис. 23). Сколь угодно малое отклонение шарика от вершины горы приводит к его скатыванию вниз, т.е. к удалению от положения равновесия. Отклонение шарика от дна ямы приводит к его возвращению в исходное состояние.

Положения равновесия для систем, характеризуемых уравнениями (4.1) и (4.2), являются соответственно, неустойчивым и устойчивым по Ляпунову. Пример системы с асимптотически устойчивым положением равновесия дает задача об эволюции биологического вида, находящегося в неблагоприятных условиях, которая описывается уравнением

**

где ε – параметр процесса (скорость вымирания вида). Решение системы имеет вид

*x*(*t*) = *x*(0) exp (-ε*t*)

и при *t* → ∞ стремится к положению равновесия *х*\* = 0 .

Важнейшие классы положений равновесия (для начала координат) в двумерном случае изображены на рис. 24. Соответствующие интегральные кривые (точнее, одна из двух составляющих кривой), изображены на рис. 25. *Устойчивый узел* характеризуется тем, что все фазовые кривые, проходящие в его окрестности, непременно заканчиваются в этой точке. Соответствующие интегральные кривые монотонно стремятся при *t*→ ∞ к этой точке. Для *неустойчивого узла*все фазовые кривые из окрестности положения равновесия выходят. Соответствующие интегральные кривые со временем монотонно удаляются от положения равновесия. *Седло* характеризуется тем, что все фазовые кривые (за исключением двух, входящих в положение равновесия и двух, выходящих из него) начинаются вдали от положения равновесия, приближаются к нему и затем удаляются. Интегральные кривые в этом случае ведут себя аналогичным образом. В случае *устойчивого фокуса* фазовые кривые имеют вид закручивающейся спирали, скручивающейся к положению равновесия. Интегральные кривые в этой ситуации выходят на положение равновесия немонотонно. Устойчивым фокусом является положение равновесия для уравнения колебания маятника при наличии трения. Для *неустойчивого фокуса*фазовые кривые имеют вид раскручивающейся спирали, а интегральные кривые удаляются от положения равновесия немонотонным образом. В случае *центра* фазовые кривые являются замкнутыми, а интегральные кривые – периодическими функциями. Это относится, в частности, к уравнению колебания маятника.



Рис. 24. Положения равновесия динамических систем на плоскости.



Рис. 25. Поведение интегральных кривых  
в окрестности нулевого положения равновесия.

#### **Компьютерный эксперимент. Нелинейные колебания маятника.**

Обратиться к лабораторной работе "Нелинейные колебания маятника". Провести следующий анализ:

1. Задать малые значения начального положения и начальной скорости маятника в режиме "трение учитывается". Убедиться в том, что колебания маятника затухают, что соответствует асимптотической устойчивости положения равновесия.

2. Задавая малые значения начального положения или начальной скорости в режиме "трение отсутствует", убедиться в том, что состояние системы не стремится к положению равновесия, но остается в некоторой его окрестности, что соответствует устойчивости положения равновесия по Ляпунову.

3. Задать начальное отклонение маятника равным 180о и нулевую начальную скорость в режиме "трение отсутствует". Убедиться в том, что при этих условиях маятник остается в равновесии. Наблюдать процесс рекомендуется на малом интервале времени.

4. Убедиться в том, что в неустойчивом положении равновесия маятник не будет находиться долго, что связано с накоплением погрешности в процессе приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений.

5. Задавая малое отклонение маятника от рассмотренного выше положения равновесия, убедиться в том, что маятник существенным образом отклоняется от него, т.е. положение равновесия оказывается не устойчивым.

## 6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Рассмотрим еще один удивительный вариант эволюции динамической системы. Пусть заданы дифференциальные уравнения

**** . (4.6)

Качественный анализ исследуемой задачи удобнее проводить не в   
декартовой, а в полярной системе координат. Введем новые переменные – угол ϕ и радиус *r* с помощью равенств

*x*1 *= r* cos ϕ , *x*2 = *r* sin ϕ .

В результате система уравнений (4.6) принимает вид

 . (4.7)

В соотношениях (4.7) функции состояния могут быть исследованы независимо друг от друга, чем и объясняется целесообразность замены переменных.



Рис. 26. Свойства системы (4.7).

Первое из уравнений (4.7) имеет три положения равновесия   
*r* = -1 , *r* = 0 и *r* = 1 . Значение *r* = -1 интереса не представляет, поскольку в полярных координатах величина *r* не может быть отрицательной, т.е. не принадлежит фазовому пространству для системы (4.7). Нетрудно убедиться, что положение равновесия *r* = 0 неустойчиво, а *r* = 1 – устойчиво. Соответствующие интегральные и фазовые кривые изображены на рис. 26. Отметим, что угловая координата убывает с постоянной скоростью, равной -1. Радиальная же координата монотонно возрастает при *r* < 1 и монотонно убывает при *r* > 1 .

Перейдем теперь к системе (4.6). Она имеет единственное положение равновесия *x*1 = 0 , *x*2 = 0 , соответствующее значению *r* = 0, а значит, являющееся неустойчивым. Предположим для определенности, что начальное состояние системы характеризуется координатами *x*1 , *x*2 удовлетворяющими неравенству  . Применительно к системе (4.7) это соответствует неравенству *r* < 1 . Тогда согласно первому уравнению (4.7) функция *r* будет со временем стремиться к единице. Второе уравнение (4.7) говорит о вращении точки в фазовой плоскости с постоянной угловой скоростью по часовой стрелке, т. е. в направлении, противоположном возрастанию угла ϕ . В результате мы получаем раскручивающуюся спираль (неустойчивый фокус), которая "наматывается" на окружность единичного радиуса с центром в начале координат (см. рис. 27).



Рис. 27. Фазовые кривые для системы (4.6).

Пусть в начальный момент времени справедливо равенство  , т.е. *r* = 1 . Согласно первому из равенств (4.7) величина *r* со временем меняться не будет. Однако угловая координата будет изменяться с постоянной скоростью. В результате соответствующая фазовая кривая является окружностью, а интегральные кривые – периодическими функциями.

При выполнении условия  в начальный момент времени будет справедливо неравенство *r* > 1 . Тогда, как видно из рис. 26, радиальная координата уменьшается и асимптотически приближается к положению равновесия *r* = 1 . В то же время угловая скорость остается постоянной. Таким образом, фазовые кривые будут "наматываться" на единичную окружность извне (см. рис. 27).

В данном случае мы имеем дело с *предельным циклом*, который считается устойчивым. Если заменить направление фазовых скоростей (стрелок на рис. 27) на противоположное, то получается неустойчивый предельный цикл. Колебания, возникающие в системе с предельным циклом, называются *автоколебаниями*. Они существенно отличаются от тех, что возникают в системе с положением равновесия "центр". В последнем случае амплитуда определяется начальным состоянием систем (см., например, колебание маятника). При автоколебаниях начальное состояние принципиальной роли не играет. Со временем система выйдет на колебания, определяемые исключительно ее внутренней структурой. Так, в рассмотренном примере амплитуды колебания функций *x*1 и *x*2 стремятся к единице. Явления автоколебаний и предельные циклы широко встречаются на практике. На этом принципе основана работа часов, сердца и др.

#### **Компьютерный эксперимент. Предельный цикл.**

Обратиться к лабораторной работе "Предельный цикл", посвященной исследованию системы (4.6). Выполнить следующие действия.

1. Задавая начальное состояние системы внутри единичного круга, обнаружить выход системы на предельный цикл с увеличением амплитуды колебания. Убедиться в том, что предельная амплитуда колебания не зависит от начального состояния системы.

2. Задавая начальное состояние системы на окружности единичного радиуса, обнаружить периодическое изменение со временем функций состояния.

3. Задавая начальное состояние системы вне единичного круга, обнаружить выход системы на предельный цикл с уменьшением амплитуды колебания. Убедиться в том, что предельная амплитуда колебания не зависит от начального состояния системы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассматриваются две системы дифференциальных уравнений с предельным циклом. Одна из них описывает некоторую систему химических реакций. Для второй характерно наличие двух предельных циклов – устойчивого и неустойчивого.

### **1. Брюсселятор.**

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

, (4.8)

где *p* и *q* – положительные константы. Она соответствует математической модели некоторой системы химических реакций, называемой "брюсселятором" и записанной в безразмерных переменных. Можно убедиться в том, что при выполнении условия *q = p*2 + 1 система обладает предельным циклом. При этом для любого начального состояния решение данных дифференциальных уравнений со временем выходит на один и тот же колебательный режим.

#### **Компьютерный эксперимент. Брюсселятор.**

Обратиться к лабораторной работе "*Брюсселятор*", в которой рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, эквивалентная уравнениям (4.8) и описывающая некоторые химические процессы. Выполнить следующий анализ.

1. П*р*овести расчеты со следующими значениями параметров системы:   
*х*0 = 3.4 , *у*0 = 1.1 , *a* = 3 , *b* = 5 , *k*1 = 0.5 , *k*2 = 0.7 , *k*3 = 0.9 , *k*4 = 1.2 . Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически.

2. При тех же значениях коэффициентов уравнений и начальных состояниях *х*0 = 1.7 , *у*0 = 3 , обнаружить выход на периодический режим с возрастанием амплитуды. Обратить внимание, что процесс выходит на тот же колебательный режим, что и в предшествующем случае.

3) При тех же значениях коэффициентов уравнений и начальных состояниях *х*0 = 0.3 , *у*0 = 0.3 , обнаружить выход на периодический режим с убыванием амплитуды. Обратить внимание, что процесс выходит на тот же колебательный режим, что и в предшествующих случаях.

### **2. Система с двумя предельными циклами.**

Рассматривается система дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах записывается следующем образом:

 . (4.9)

Нетрудно убедиться, что соответствующая ей система, записываемая в декартовых координатах, имеет два предельных цикла, определяемых значениями   
*r* = 2 и *r* = 4 . В частности, для любого начального состояния, находящегося на каждой из указанных окружностей, решение задачи оказывается периодическим. Характерно, что любая фазовая кривая в области *r* < 2 выходит на окружность *r* = 2 изнутри, а в области 2 < *r* < 4 – извне. В то же любая фазовая кривая удаляется от окружности *r* = 4 . В этих условиях первый предельный цикл называют *устойчивым*, а второй – *неустойчивым*.

Поведение фазовых кривых для системы (4.9) в декартовых координатах изображено на рис. 28.



Рис. 28. Фазовые кривые для системы (4.9).

## КОММЕНТАРИИ

При изложении лекции мы пользовались, главным образом, материалами из книги В. И. Арнольда [5]. Среди многочисленной литературы по качественной теории дифференциальных уравнений отметим монографии   
Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона [49], С. Лефшеца [67], Ф. Хартмана [140] и Л. Э. Эльсгольца [151]. Теория нелинейных колебаний достаточно подробно излагается в книгах А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [4] и   
Ф. Муна [95].

Примеры некоторых недетерминированных процессов будут приведены в лекции № 16. Некоторые задачи квантовой механики, также связанные с отсутствием детерминированности, исследуются в лекции № 17.

При исследовании процессов переноса приходится иметь дело с процессами, не обратимыми во времени (см. лекция № 14). В этом случае можно ввести понятие динамической полугруппы преобразований, в которой отсутствует требование обратимости преобразования.

Конечномерные процессы (системы с сосредоточенными параметрами) исследуются также в лекциях №№ 5 – 11, а бесконечномерные процессы (системы с распределенными параметрами) – в лекциях №№ 12 – 15 и 17.

Математическая теория ударных волн излагается, например, в книге   
Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко [115], а броуновское движение – у   
К. Хира [143].

Исследование эволюции биологического вида является предметом динамики популяций и рассматривается в лекции № 6.

Следует отметить, что помимо рассмотренных выше существуют и другие типы фазовых кривых, а значит, и другие виды эволюции динамических процессов. Это касается, в первую очередь, систем с более высокой размерностью фазового пространства.

Практически все введенные в данной теме понятия распространяются на системы с распределенными параметрами, которые характеризуются бесконечномерными фазовыми пространствами. При этом положения равновесия уже будут удовлетворять не алгебраическим, а более сложным уравнениям, которые соответствуют стационарным процессам (см. лекция № 15).

Многочисленные примеры предельных циклов (включая приведенные выше) описываются, например, в [4], [75], [95], [140], [151]. Химические реакции, соответствующие модели "брюсселятора", приводятся в лекции № 5, где исследуются математические модели химических процессов (см. также [75], [98], [138]).

Другие аспекты качественной теории дифференциальных уравнений (разрешимость, единственность решения, непрерывная зависимость решения от параметра) будут рассмотрены в лекции № 16.

# Лекция № 5 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ХИМИИ

Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той степени, в   
какой может быть применена в нем математика.

Иммануил КАНТ

Обзор математических моделей отдельных наук мы начинаем с химии. Ее является, прежде всего, изучение структуры молекул и изменение этой структуры в процессе их взаимодействия между собой. Естественно, мы не имеем возможности познакомиться со всем многообразием математических проблем, возникающих в столь обширной и неисчерпаемой науке. Поэтому нам неминуемо придется ограничиться рассмотрением лишь одного из разделов химии, играющего, впрочем, в ней ключевую роль. Речь пойдет о химической кинетике – глубоком научном направлении, лежащем на стыке химии и физики и изучающем бурное течение разнообразных химических реакций.

Составление математических моделей рассматриваемых процессов   
начинается с записи стехиометрического уравнения, характеризующего   
количество молекул исходных веществ и продуктов реакции, участвующих в элементарном химическом взаимодействии. На основе стехиометрического уравнения в соответствии с законом действующих масс устанавливаются   
кинетические дифференциальные уравнения относительно концентраций всех веществ, участвующих в реакции.

Наиболее простые линейные дифференциальные уравнения химической кинетики соответствуют мономолекулярным реакциям. Более сложные реакции, в которых участвуют сразу несколько молекул, описываются нелинейными уравнениями, обладающими разнообразными свойствами. На практике чаще всего приходится иметь дело не с отдельной химической реакцией, а с целой системой реакций. В качестве примера рассматривается совокупность химических реакций, описываемых уравнениями Вольтерра – Лотки. Другие системы реакций рассматриваются в приложении.

## 1. УРАВНЕНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Центральной задачей химии, конечно же, является исследование химических реакций. *Химическая реакция*состоит в превращении одного или нескольких веществ, называемых *исходными веществами*, в одно или несколько других веществ, являющихся *продуктов реакции*. Химическая реакция, как правило, происходит в результате взаимодействия молекул (а также отдельных атомов, ионов и др.). Вследствие этого происходит либо слияние исходных веществ в новый более сложный продукт реакции, либо распад молекулы на более простые составляющие, либо обмен одним или несколькими атомами взаимодействующих молекул. Мы будем исследовать динамические процессы, связанные с течением химических реакций и являющиеся предметом *химической кинетики*.

Предположим, что имеются исходные вещества *А*1 , *А*2 , ... , *Аm* , в результате взаимодействия которых получаются некоторые продукты реакции *В*1 , *В*2 , ... , *Вn* . Пусть из μ1 молекул вещества *А*1 , μ2 молекул веществ *А*2 и т.д. образуются ν1 молекул продукта реакции *В*1 , ν2молекул вещества *В*2 и т.д. Указанный процесс схематически обозначается следующим образом:

μ1 *А*1 + ... + μ*m**Аm* → ν1*В*1 + ... + ν*n**Вn* . (5.1)

Соотношение (5.1), являющееся формальной записью рассматриваемой реакции, называется *стехиометрическим уравнением*. Оно включает в себя натуральные числа μ1 , ... , μ*m* , ν1 , ..., ν*n* , называемые   
*стехиометрическими коэффициентами*. Сумму *n* = μ1 + ... + μm,   
характеризующую количество молекул, участвующих в единичной реакции,называют *порядком химической реакции*(5.1).

К примеру, образование воды (продукта реакции) в результате взаимодействия кислорода с водородом (исходных веществ) происходит следующим образом. В результате слияния двух молекул водорода (μ1 = 2) с одной молекулой кислорода (μ2 = 1) образуется две молекулы воды (ν1 = 2). Таким образом, мы имеем реакцию третьего порядка, характеризуемую стехиометрическим уравнением

2 *Н*2 + *О*2 → 2 *Н*2*О* .

Обратимся теперь к математическому описанию исследуемых явлений. В процессе химической реакции меняются *концентрации*  исходных веществ и продуктов реакции, т.е. число молекул того или иного сорта, находящихся в единице объема. Естественно и выбрать эти характеристики в качестве функций состояния исследуемого   
процесса. Математическая модель рассматриваемой реакции должна, таким образом, описывать изменение со временем концентраций всех участвующих в реакции веществ.

Попытаемся количественно оценить течение химической   
реакции. Изменение структуры молекул происходит в результате их столкновения. Очевидно, чем выше концентрация исходных веществ, тем чаще они будут сталкиваться между собой и вступать в реакцию. Таким образом, скорость изменения концентраций рассматриваемых веществ (как исходных, так и продуктов реакции) должна быть прямо пропорциональной концентрации каждого из реагирующих веществ. Эта скорость положительна для продуктов реакции (они появляются в процессе химического превращения) и отрицательна для исходных веществ (их концентрация за счет реакции убывает). Приведенные   
соображения и определяют суть *закона действующих масс*.

Прежде, чем описать изменение концентрации веществ, участвующих в реакции общего вида (5.1), обратимся к существенно более простым процессам. Таким же образом осуществляется моделирование любых явлений окружающего мира – сначала выявляются отдельные закономерности для предельно простых явлений, а затем полученные результаты распространяются на более общий случай.

Начнем с рассмотрения простейшей реакции первого порядка, называемой также *мономолекулярной реакцией*. Она характеризуется распадом исходного вещества на два продукта реакции

*А* → *В*1 + *В*2. (5.2)

Примером такой реакции служит разложение бромистого этила на этилен и бромистый водород: *С*2 *H*5 *Br* → *С*2 *H*4 + *H Br*.

Скорость изменения концентрации *b*1 продукта реакции *B*1 будет пропорциональна концентрации *a* исходного вещества *A*. Действительно, чем больше молекул вещества *A* находится в единице объема, тем большее их число распадется в единицу времени, образуя при этом продукт реакции *B*1. В результате получаем соотношение



называемое *кинетическим уравнением*реакции (5.2). Положительная величина *k* называется *константой скорости химической реакции*. Она является параметром исследуемого процесса и зависит от температуры, давления, наличия катализатора и других факторов. Иногда константу скорости реакции включают в запись стехиометрического уравнения (это приобретает особую важность в том случае, когда рассматривается система химических реакций, см. ниже). Таким образом, более полная форма записи реакции (5.2) имеет вид

 .

Обратимся теперь к нахождению закона изменения концентрации *b*2 продукта *B*2 реакции (5.2). Очевидно, в результате распада одной молекулы вещества *А* получается по одной молекуле каждого из продуктов реакции. Следовательно, в единицу времени появляется одинаковое количество молекул веществ *B*1 и *B*2. Таким образом, кинетическое уравнение для второго продукта реакции записывается так же, как и для первого:

**** .

Концентрация исходного вещества *А* в процессе реакции убывает. При этом число распавшихся молекул в точности равно числу молекул каждого из появившихся в результате реакции веществ. Следовательно, скорость изменения концентрации *а* отличается от скоростей изменения функций *b*1 и *b*2 только знаком, что соответствует кинетическому уравнению

.

На основе проведенного анализа заключаем, что скорость изменения концентраций всех участвующих в реакции веществ одинакова. Эта величина называется *скоростью реакции*и определяется исключительно константой *k*. Для продуктов реакции скорость изменения концентрации равна скорости реакции, а для исходного вещества она равна скорости реакции, взятой с противоположным знаком.

Для оценки влияния стехиометрических коэффициентов на вид кинетического уравнения рассмотрим частный случай реакции (5.2), когда продукты реакции *B*1 и *B*2 совпадают, т.е. молекула исходного вещества распадается на две молекулы единственного продукта реакции. Соответствующее стехиометрическое уравнение записывается следующим образом:

*А* →2 *В*. (5.3)

Примером подобной реакции служит разложение молекулы водорода на два атома  *H*2 → 2*H* .

Ранее отмечалось, что изменение концентраций реагирующих веществ зависит исключительно от концентраций исходных веществ. В реакциях (5.2) и (5.3) имеется единственное исходное вещество *А*. Это означает, что закон изменения концентрации *а* для обеих реакций один и тот же. Таким образом, остается записать кинетическое уравнение для продукта реакции. Очевидно, при распаде одной молекулы исходного вещества получается две молекулы продукта реакции. Таким образом, скорость роста концентрации *b* вещества *В* вдвое превышает скорость убывания функции *а*. Тем самым получаем кинетическое уравнение

**** .

Рассмотрим теперь реакцию второго порядка, т.е. *бимолекулярную реакцию*. Таковой будет, в частности, *реакция синтеза* – объединение двух веществ в один продукт реакции

*А*1 + *А*2 → *В*. (5.4)

Примером подобной реакции служит образование углекислого газа за счет слияния молекулы угарного газа и атома кислорода:   
*CO* + *O* → *CO*2.

Скорость изменения концентрации вещества *В* для реакции (5.4) прямо пропорциональна концентрации обоих исходных веществ, а значит, и их произведению. Тогда кинетическое уравнение для продукта реакции принимает вид

** .**

Поскольку число молекул продукта реакции, появляющихся в единице объема за единицу времени, в точности равно числу молекул каждого из исходных веществ, вступивших в реакцию, скорости изменения концентраций *а*1 и *а*2 совпадают между собой и отличаются от скорости изменения концентрации продукта реакции только знаком. В результате получаем нелинейные кинетические уравнения

.

Предположим теперь, что вещества *А*1 и *А*2 в реакции (5.4) совпадают, т.е. рассматривается реакция

2 *А* → *В*. (5.5)

Ее примером оказывается слияние двух атомов кислорода в одну молекулу: 2*О* → *О*2. Продукты реакции в стехиометрических уравнениях (5.4) и (5.5) одни и те же. Следовательно, уравнение относительно функции *b* в данном случае записываются так же, как и в предшествующем. Надо лишь иметь в виду, что исходные вещества *А*1 и *А*2для реакции (5.5) совпадают между собой. Приравнивая друг другу концентрации *а*1 и *а*2 в кинетическом уравнении относительно продукта реакции (5.5), получаем соотношение

****.

Отметим, что на каждую вновь образовавшуюся молекулу вещества *В* согласно стехиометрическому уравнению (5.5) приходится по две молекулы исходного вещества. Тем самым скорость убывания концентрации последнего будет вдвое больше скорости возрастания функции *b*. Таким образом, соответствующее кинетическое уравнение принимает вид

****.

Теперь мы уже накопили достаточное количество сил и можем, наконец, обратиться к химической реакции общего вида, характеризуемой стехиометрическим уравнением (5.1). Скорость изменения концентрации *bi*продукта реакции *Вi* пропорциональна соответствующему коэффициенту ν*i*, умноженному на произведение всех концентраций *aj* исходных веществ, возведенных в степень μ*j*. В результате получаем кинетические уравнения

 . (5.6)

Аналогично скорость изменения концентрации *ai* пропорционально взятому со знаком "минус" стехиометрическому коэффициенту μ*i* , умноженному на произведение концентраций всех исходных веществ, возведенных в соответствующую степень. В результате получаем уравнение

 . (5.7)

Справедливы следующие соотношения

.

Величина, стоящая в правой части этого выражения, называется *скоростью химической реакции*(5.1). Она показывает, насколько быстро меняются концентрации веществ, участвующих в данной реакции.

Уравнения (5.6), (5.7) пополняются начальными условиями

 , (5.8)

где *ai*0 , *bj*0 – начальные концентрации соответствующих веществ. Задача Коши (5.6) – (5.8) и будет математической моделью исследуемого процесса. Решая ее, можно определить закон изменения со временем концентраций всех участвующих в реакции веществ в зависимости от константы скорости реакции *k* и всех начальных концентраций.

Отметим, что система уравнений (5.7) может быть решена вне зависимости от концентраций продуктов реакции. Определив значения концентраций *ai* , можно перейти к решению уравнений (5.6) с уже известными правыми частями, что является достаточно простой задачей. Ниже будет рассмотрены некоторые частные случаи реакции (5.1), допускающие проведение качественного анализа соответствующей системы кинетических уравнений.

## 2. МОНОМОЛЕКУЛЯРНАЯ РЕАКЦИЯ

Установим закон изменения концентраций для мономолекулярной реакции (5.2). Как уже отмечалось, математическая модель, данного процесса включает в себя дифференциальные уравнения



с начальными условиями

*a*(0) = *a*0 ; *bi*(0) = *bi* , *i* = 1,2 .

Прежде всего, определим закон изменения концентрации исходного вещества из задачи Коши

 = *- k a* , *t* > 0 ; *a*(0) = *a*0 .

Ее решение имеет вид *a*(*t*) = *a*0 exp(-*kt*) . Таким образом, функция *а* экспоненциально убывает и при *t* → ∞ стремится к нулю для любого начального состояния *a*0 . Соответствующее уравнение имеет единственное положение равновесие (нулевое), которое оказывается устойчивым.

Зная закон изменения концентрации исходного вещества, из соотношений

****

находим функцию



Очевидно, функции *bi* со временем возрастают, причем справедливо соотношение



Полученные результаты изображены на рис. 29. Тем самым можно считать завершенным второй этап исследования – математический анализ рассматриваемой системы дифференциальных уравнений с   
соответствующими начальными условиями. Теперь остается лишь интерпретировать полученные результаты. Мы видим, что концентрация исходного вещества со временем убывает, в то время как количество продуктов реакции монотонно растет, что естественно согласуется   
со здравым смыслом. Отметим, что скорость изменения всех величин



Рис. 29. Изменение концентраций для мономолекулярной реакции.

стремится к нулю. По мере убывания концентрации исходного вещества все меньшее количество его молекул распадается, причем со временем всё исходное вещество благополучно прореагирует. В свою очередь, концентрации продуктов реакции неуклонно растут по мере убывания концентрации исходного вещества. На каждую распавшуюся молекулу исходного вещества, как известно, образуется по одной молекуле продуктов реакции. Таким образом, со временем концентрации продуктов реакции стремятся к сумме их начальной концентрации и начальной консультации исходного вещества.

Оценим влияние параметров процесса на ход реакции. Начальная концентрация исходного вещества качественно не влияет результаты. Чем она больше, тем больший запас молекул имеется, а значит, тем дольше будет происходить процесс распада. Однако всё вещество рано или поздно прореагирует, т.е. предельное значение концентрации исходного вещества не зависит от его начальной концентрации. В то же время, конечное значение продуктов реакции зависит от этой величины. Начальные значения продуктов реакции не оказывается никакого влияния на концентрацию исходного вещества и вызывает пропорциональное изменение концентрации продуктов реакции, поскольку на результат влияет исходное вещество (причина), но никак не продукты реакции (следствие). Чем выше константа скорости реакции, тем интенсивнее проходит реакция, а значит, тем больше молекул исходного вещества распадется в единицу времени. С возрастанием скорости реакции процессы распада происходят более интенсивно (см. рис. 30 б). Понятно, что скорость реакции не оказывает совершенно никакого влияния на предельные значения всех веществ.



а) влияние начальное концентрации б) влияние скорости реакции

Рис. 30. Влияние параметров на концентрацию исходного вещества.

## 3. БИМОЛЕКУЛЯРНАЯ РЕАКЦИЯ

Рассмотрим более сложную реакцию синтеза (5.5). Она описывается нелинейными дифференциальными уравнениями



с начальными условиями

*ai*(0) = *ai*0 , *i* = 1,2 ; *b*(0) = *b*0 .

Уравнения относительно концентрации исходных веществ не включают в себя функцию *b*. Тогда первые два уравнения рассматриваемой системы могут быть решены независимо от третьего. Из равенства  следует, что функции *а*1 и *а*2 могут отличаться лишь на константу:

*а*2(*t*) = *a*1(*t*) + *c*  , *t* ≥ 0 .

Из начальных условий определяется значение *c* = *a*20 – *a*10 . Исключив из первого кинетического уравнения функцию *a*2, получаем соотношение

 .

В результате установим нелинейное дифференциальное уравнение

 , (5.9)

называемое*уравнением Бернулли*.

С целью упрощения полученного выражения введем новую неизвестную функцию *x*(*t*) = *a*1(*t*) -1 . Справедливы равенства

.

Подставляя эти величины в соотношение (5.9), будем иметь линейное дифференциальное уравнение

 ,

которое имеет решение

****

где *с*' – некоторая константа. В результате находим общее решение уравнения (5.9)

.

Полагая *t* **=** 0 , пользуясь начальными условиями и учитывая вид константы *с*, определим значение

**** .

Тогда концентрация вещества *А*1 будет изменяться по закону

**** ,

где λ **=** *k* (*a*20 – *a*10) . Учитывая связь между концентрациями исходных веществ, находим функцию

****.

Из равенства  и начальных условий определяем функцию

*b*(*t*) = *b*0 + *a*10 – *a*1(*t*) .

Таким образом, концентрация продукта реакции равна

****.

Предположим, что выполнено неравенство *a*20 > *a*10 , откуда следует, что λ>0 . Это допущение не нарушает общности исследования, поскольку в качестве *A*2 мы вправе выбрать то из исходных веществ, у которого начальная концентрация выше. Определив предел

**** ,



Рис. 31. Изменение концентраций для реакции *А*1 + *А*2 → *В* .

установим, что концентрация исходного вещества с меньшей начальной концентрацией экспоненциально убывает и со временем стремится к нулю. Следовательно, вещество *A*1 в конце концов все прореагирует (см. рис. 31).

Найдем величину

****

Таким образом, концентрация второго исходного вещества убывает и стремится к разности начальных концентраций исходных веществ   
(см. рис. 31). Поскольку на каждую молекулу вещества *A*1 , вступившую в реакцию, приходится по одной молекуле вещества *A*2 , наличие избытка второго вещества в начальный момент времени приводит к тому, что, когда практически все первое вещество вступит в реакцию, остается еще некоторое количество вещества *A*2 , которому не с чем реагировать. Это количество естественно и равно разности начальных концентраций. В частности, при выполнении равенства *a*20 **=** *a*10 концентрации обоих веществ убывают по одному и тому же закону и стремятся к нулю.

Оценим изменение продукта реакции. Вычисляем предел

****

Итак, концентрация продукта реакции со временем растет и стремится к сумме его начальной концентрации и начальной концентрации вещества *A*1 . Это объясняется тем обстоятельством, что общее количество молекул вещества *B*, образовавшееся в процессе реакции, в точности равно числу прореагировавших молекул каждого из исходных веществ. Мы знаем, что все молекулы вещества *A*1 рано или поздно вступят в реакцию. Следовательно, со временем концентрация продукта реакции возрастет как раз на величину начальной концентрации вещества *A*1.

## 4. СИСТЕМА РЕАКЦИЙ ЛОТКИ

На практике чаще всего происходит не одна реакция, а целое семейство реакций. При этом конкретное химическое вещество может участвовать в нескольких реакциях одновременно, причем, как в качестве исходного вещества, так и в виде продукта реакции. В качестве примера рассмотрим систему химических реакций, характеризуемую стехиометрическими уравнениями Лотки

.

Первые две реакции оказываются *автокаталитическими*, т.е. продукты реакции (вещества *X* и *Y*)являются в то же время и исходными веществами.

При составлении соответствующих кинетических уравнений следует учитывать все реакции. Уравнения для исходного вещества *А* и продукта реакции *В*, участвующих в единственной реакции, записываются естественным образом:

.

Вещество *Х* является исходным для первой и второй реакции и продуктом в первой реакции. Тогда при оценке скорости изменения его концентрации следует учитывать ее суммарное изменение в каждой из реакций:

.

В результате получаем соотношение

.

Аналогичным образом записывается уравнение относительно концентрации вещества *Y*

.

Поскольку вещество *В* лишь образуется в процессе реакции, его концентрация неизменно возрастает и не входит в правые части полученных уравнений. Таким образом, при исследовании установленных соотношений его можно не рассматривать, считая, что это вещество выводится за пределы реактора. Исходное вещество *А*, напротив, постоянно расходуется, а его концентрация убывает, что неминуемо должно привести к замедлению всего процесса. Для поддержания реакции будем считать, что в системе наблюдается постоянный подвод вещества *А*, компенсирующий его расход.В этих условиях его концентрация остается неизменной, являясь параметром задачи. При сделанных предположениях процесс описывается следующей системой кинетических уравнений

 , (5.10)

называемых *уравнениями Вольтерра - Лотки*.

Можно показать, что ее решения являются периодическими функциями (см. рис. 32). Пусть, например, изначально концентрации обоих промежуточных веществ столь малы, что выполняются неравенства *k*2 *у* < *k*1 *a* , *k*2 *х* < *k*3 . Это означает, что первая и третья реакции оказываются интенсивнее второй. Тогда согласно уравнениям (5.10) производная первой функции состояния положительна, а второй –   
отрицательна, т.е. процесс образования первого вещества в первой реакции преобладает над его распадом во второй реакции, а распад второго вещества во второй реакции преобладает над его образованием в третьей реакции. Мы наблюдаем возрастание концентрации первого вещества и снижение концентрации второго вещества (см. рис. 32, этап I). Со временем первого вещества уже оказывается столь много, что выполняется неравенство *k*2 *x* > *k*3 . Это означает, синтез второго вещества во второй реакции начинает преобладать над его распадом в третьей реакции, вследствие чего мы наблюдаем рост концентрации обоих веществ (см. рис. 32, этап II). Неминуемо наступает такой   
момент времени, когда второго вещества будет уже достаточно для выполнения неравенства *k*2 *у* > *k*1 *a* , т.е. для преобладания распада над

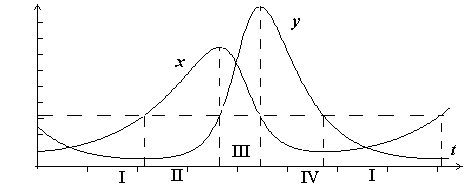


Рис. 32. Решение уравнений Вольтерра - Лотки.

синтезом первого вещества. На третьей стадии процесса мы наблюдаем снижение концентрации первого вещества при возрастании концентрации второго вещества. Как только первого вещества станет достаточно мало, будет вновь выполняться неравенство *k*2 *х* < *k*3 , а значит, распад второго вещества в третьей реакции будет преобладать над его синтезом во второй реакции. Тем самым наблюдается снижение обеих концентраций (см. рис. 32, этап IV). Рано или поздно концентрация второго вещества снизится настолько, что будет выполняться неравенство *k*2 *у* < *k*1 *a* , и мы возвращаемся на первый этап процесса.

Отметим, что в данной модели помимо тривиального (нулевого) равновесного состояния имеется еще одно положение равновесие, соответствующее положительным значениям концентраций и являющееся центром. В тривиальном положении равновесия система остается потому, что в отсутствии обоих веществ никакая реакция не пойдет. В нетривиальном состоянии равновесия образование и распад обоих веществ оказываются уравновешенными.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель Вольтерра - Лотки.**

Обратиться к лабораторной работе "*Система Вольтерра - Лотки*". Провести следующий анализ:

1. Убедиться в том, что концентрации промежуточных веществ меняются со временем периодически. На фазовой плоскости такому процессу соответствует замкнутая кривая.

2. Меняя начальные состояния системы, обнаружить увеличение и уменьшение амплитуды колебания концентраций.

3. Полагая все коэффициенты уравнений и начальные концентрации, равными единице, установить равновесие системы.

4. Меняя начальные состояния системы, убедиться в том, что положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассматриваются некоторые системы химических реакций, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Одна из них соответствует математической модели, называемой "*брюсселятором*", а вторая – "*химической ниши*". Совершенно неожиданным оказывается тот факт, что кинетические уравнения в последней модели описывают и процессы лазерного излучения.

### **1. Брюсселятор.**

Рассматривается следующая система химических реакций:



При постоянном подводе исходных веществ *A* и *B* и отводе продуктов реакции *D* и *E* концентрации соответствующих веществ будут известными, и требуется установить лишь изменение со временем концентраций промежуточных веществ *X* и *Y*. Они описываются уравнениями

 .

С помощью преобразований

 = *k*4, *u*() = √*k*3*/k*4) *x*(*t*) , *v*() = √*k*3*/k*4) *y*(*t*) ,

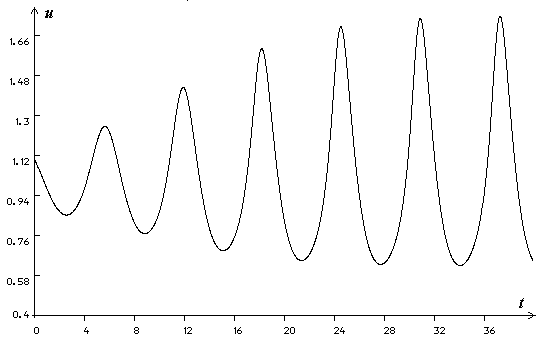
система приводится к следующему виду

,

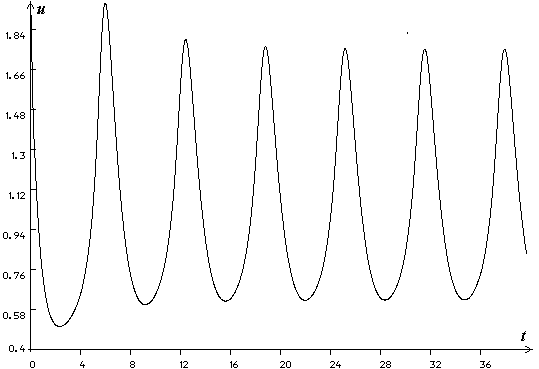
где

 .

В зависимости от сочетания параметров здесь возможно положение равновесия, являющееся фокусом (устойчивым или неустойчивым), а также предельный цикл. В последнем случае, реализуемым при выполнении равенства *q = p*2 + 1 , решение уравнений со временем выходит на один и тот же периодический режим вне зависимости от выбора начального состояния (см. рис. 33).



а) *u*0 = 1.1 , *v*0 = 2 , *p* = 1 , *q* = 2.2 .



б) *u*0 = 2 , *v*0 = 0.5 , *p* = 1 , *q* = 2.2 .

Рис. 33. Состояние системы для модели "брюсселятор" при различных  
начальных состояниях выходит на один и тот же колебательный режим.

#### **Компьютерный эксперимент. Брюсселятор.**

Обратиться к лабораторной работе "*Брюсселятор*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты со следующими значениями параметров: *х*0 = 0.5 ,   
*у*0 = 0.5 , *a* = 3 , *b* = 5 , *k*1 = 1.2 , *k*2 = 0.7 , *k*3 = 0.9 ,  *k*4 = 1 . Убедиться в том, что со временем концентрации промежуточных веществ выходят на стационарный режим.

2. Провести расчеты при *х*0 = 5 , оставив значение всех остальных параметров неизменными. Убедиться в том, что состояния системы неограниченно возрастают.

3. Провести расчеты со следующими значениями параметров системы:   
*х*0 = 3.4 , *у*0 = 1.1 , *a* = 3 , *b* = 5 , *k*1 = 0.5 , *k*2 = 0.7 ,  *k*3 = 0.9 , *k*4 = 1.2 . Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически.

4. При тех же значениях коэффициентов уравнений и начальных состояниях *х*0 = 1.7 , *у*0 = 3 , обнаружить выход на периодический режим с возрастанием амплитуды. Обратить внимание, что процесс выходит на тот же колебательный режим, что и в предшествующем случае.

5. При тех же значениях коэффициентов уравнений и начальных состояниях *х*0 = 0.3 , *у*0 = 0.3 , обнаружить выход на периодический режим с убыванием амплитуды. Обратить внимание, что процесс выходит на тот же колебательный режим, что и в предшествующих случаях.

### **2. Химическая ниша.**

Дана следующая система химических реакций:



Предполагается, что исходное вещество *А* постоянно подается в реактор извне так, что концентрация *а* остается неизменной. Продукты реакции *В*, *С* и *D* выводятся из реактора и не рассматриваются. Уравнения относительно промежуточных веществ *Х* и *Y* имеют следующий вид:

 .

Получаемая модель называется "*химической нишей*".

Особый интерес представляет частный случай приведенной модели, в котором скорости реакций связаны следующем соотношением:

.

Тогда кинетические уравнения принимают вид

,

где  Эта система соответствует модели "*химической конкуренции*". С такими уравнениями мы еще встретимся неоднократно. В физике они описывают процесс лазерного излечения.

### **3. Модели лазерного излучения.**

Опишем модель физической "конкуренции", связанной с лазерным излучением. В процессе внешнего возбуждения атомов (накачки) *лазер* испускает фотоны. *Число фотонов* *х* выбирается в качестве функции состояния системы. Скорость изменения этой величины складывается из прироста фотонов за счет стимулирующего излучения, связанного с возбуждением атомов, и потерь в силу ухода фотонов за пределы системы. Таким образом, справедливо соотношение:

,

где α – параметр, называемый коэффициентом усиления, *Т* – время нахождения фотона в системе, *Х* – число возбужденных атомов. В отсутствии испускания фотонов число возбужденных атомов остается неизменным (за счет постоянной внешней накачки) и равным некоторому значению *Х*0 . При излучении фотона возбужденный атом возвращается к более стабильному состоянию. Тем самым количество возбужденных атомов уменьшается на величину, пропорциональную числу фотонов, т.е. *Х = Х*0 –β*х* , где β – некоторый коэффициент пропорциональности. В результате получаем соотношение

 ,

где γ = αβ , ε = α*Х*0 – 1/*Т* . Такое же уравнение получается и при моделировании системы химических реакций

*А* + *Х* → 2*Х* , *Х* → *В*

при условии постоянного подвода вещества *А*.Таким образом, имеется несомненная аналогия между процессами в химическом реакторе и лазере (см. табл. 5).

Табл. 5. Аналогия между химическими и физическими процессами.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | **характеристика** | **с и с т е м а**  химическая физическая | |
| 1 | объект | реактор | лазер |
| 2 | функция состояния | концентрация вещества | число фотонов |
| 3 | прирост состояния | синтез вещества | генерация фотонов |
| 4 | убыль состояния | распад вещества | уход фотонов |

Установленное выше уравнение характерно для одномодового лазера, испускающего фотоны одной и той же длины волны. Для многомодового лазера имеется несколько сортов фотонов, различающихся по своим свойствам. При наличии двух мод состояние системы описывается количеством фотонов *х*  и *у*  первого и второго типов. Повторяя предшествующие рассуждения, получаем систему



где все параметры имеют тот же физический смысл, что и в предшествующем случае. Число возбужденных атомов в данном случае равно *Х = Х*0 –β1 *х* –β2 *у.* В результате установим уравнения

,

где ε*i* = α*i* *Х*0 – 1/*Тi* , *i* = 1,2 . Полученные соотношения соответствуют модели "*химическая конкуренция*".

## КОММЕНТАРИИ

Математические модели задач химической кинетики рассматриваются, например, в книгах Л. М. Батунера и М. Е. Позина [7], Б. Льюиса и Г. Эльбе [72], Дж. Марри [75], Г. Николиса и И. Р. Пригожина [98], Г. Хакена [138],   
Л. Н. Хитрина [144], К. Эберта и Х. Эберера [149], Н. М. Эмануэля и   
Д. Г. Кнорре [152]. В лекции № 14 будет показано, что описание химических реакции с учетом диффузии реагирующих веществ осуществляется с помощью уравнений с частными производными. При этом течение химических реакций описывается уже известным способом, а изменение концентрации за счет диффузии, как это делается при исследовании процессов переноса (см. лекция № 14).

С уравнением Бернулли и методами его исследования можно познакомиться, например, в книге Ф. Хартмана [140]. Отметим, что получение аналитического решения нелинейной системы за счет ее сведения к линейному уравнению с помощью удачной замены переменных следует признать исключительной удачей, свидетельствующей об относительной простоте исследуемой задачи (в частности, ее решение оказалось строго монотонным, что совершенно не характерно для систем общей природы). Типичные нелинейные уравнения в принципе не сводимы к линейным. Таким образом, в реальной ситуации можно и не тратить попусту время на поиск аналитического решения (хотя, конечно же, его знание снимает многие вопросы), а обратиться к сравнительно надежным качественным методам исследования его свойств (см. последующие лекции) или к соответствующим численным методам, а желательно – к их разумному сочетанию.

В последующей лекции будет показано, что с уравнениями Вольтерра-Лотки связана популярная биологическая модель "*хищник-жертва*". Там же будет проведено достаточно подробное исследование этой системы. В дальнейшем будет установлено, что рассматриваемым системам уравнений можно придать биологическую, экономическую и даже социально-политическую интерпретацию, что наводит на определенные мысли.

Смысл названий "*химической нишей*" и "*химической конкуренции*" прояснится в последующих лекциях, где указанные системы уравнений получат другую интерпретацию. Там же будет проведен полный анализ рассматриваемых уравнений.

При описании брюселлятора осуществлялась замена переменных (переход к безразмерным переменным), позволяющая существенным образом сократить число параметров задачи: вместо шести параметров в исходной постановке задачи мы получаем всего два параметра в преобразованной системе уравнений. Такой прием достаточно эффективен, часто применяется на практике и будет использоваться в дальнейшем неоднократно.

Математические модели лазерного излучения приводятся, например, книге Г. Хакена [138]. В последующей лекции будет показано, что модель одномодового лазера аналогично уравнению Ферхюльста, описывающему также изменению численности биологического вида в условиях ограниченности пищи.

# Лекция № 6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ

В природе существует много такого, что не может быть ни глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи и вмешательства математики.

Фрэнсис БЭКОН

Мы, естественно, даже и не станем пытаться охватить в рамках краткой лекции всю биологию, ограничившись лишь беглым знакомством с одним из ее разделов – *динамикой популяции*. Нам предстоит стать свидетелями драматических событий, связанных с сосуществованием различных биологических видов на ограниченной территории.

Для начала рассмотрим эволюцию одного вида. Если его рождаемость преобладает над смертностью, то численность вида неуклонно возрастает. При неблагоприятных условиях с преобладанием смертности над рождаемостью вид, как это не печально, вымирает. Наличие ограничений на количество поступающей пищи при положительном естественном приросте численности вида приводит к стабилизации системы, т.е. к установлению такого значения численности вида, которому имеющееся количество пищи хватает в самый раз.

Более интересные и разнообразные процессы происходят в том случае, когда имеются несколько биологических видов. Сосуществование двух видов возможно в различных формах. В одной из приведенных моделей исследуется конкуренция видов в борьбе за общую пищу, по ходу которой менее приспособленный вид вытесняется более сильным конкурентом. Любопытно, что эволюция видов характеризуется теми же уравнениями, что и двухмодовый лазер и модель "*химическая конкуренция*", хотя, казалось бы, что может быть общего между лазером и какими-то там травоядными?

Во второй модели один из видов благополучно питается другим. Получаемая в результате знаменитая модель "*хищник-жертва*" описывается уравнениями Вольтерра – Лотки, с которыми мы встречались при исследовании соответствующих химических реакций. В процессе исследования модели осуществляется переход к безразмерным переменным, позволяющий упростить процедуру решения задачи.

В приложении выясняется, что колебание численности хищников и жертв аналогично изменению плодородия почвы и урожайности сельскохозяйственной культуры. Рассматривается сосуществование двух видов при условии, что каждый из них имеет определенное предпочтение в пище, что соответствует модели "*экологическая ниша*", химический и физический аналог которой описывались в предшествующей лекции. В этих условиях возможно выживание обоих видов. Отметим также модель "*симбиоз*", в которой виды оказывают благотворное влияние друг на друга и не могут существовать по отдельности. В результате оказывается, что оба вида либо вымирают, либо неограниченно размножаются. Учет нехватки пищи в условиях симбиоза может привести к стабилизации численности обоих видов.

## 1. ЭВОЛЮЦИЯ БИОЛОГИЧЕСКОГО ВИДА

Рассмотрим сначала простейшую биологическую систему, представленную одним видом. Исследуемый процесс характеризуется *численностью вида* *х*, которая меняется со временем. Очевидно, скорость изменения численности вида определяется соотношением между его рождаемостью и смертностью. Таким образом, получаем уравнение

* = А – В* ,

где величины *А* и *В* характеризуют соответственно, количество   
родившихся и умерших особей в единицу времени. Их значения, по-видимому, пропорциональны самой численности вида. Действительно, чем больше имеется особей, тем больше их родится и умрет за фиксированный промежуток времени. В результате получаем соотношения   
*A = a x* , *B = b x* , где положительные константы *a* и *b* являются параметрами процесса и характеризуют рождаемость и смертность вида.

Итак, рассматриваемый процесс описывается дифференциальным уравнением

** **=**  *k x* , (6.1)

где коэффициент *k* **=** *a*–*b*называется *приростом* численности вида, определяет изменение численности вида в единицу времени и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Уравнение (6.1) рассматривается с начальным условием

*х*(0) = *х*0 , (6.2)

где начальная численность вида *х*0является параметром задачи, принимающим любые положительные значения (численность вида отрицательной быть не может, а случай *х*0 = 0в силу своей тривиальности особого интереса не представляет).

Решение задачи (6.1), (6.2) имеет вид

*x*(*t*) = *x*0 exp(*k* *t*) .

Эта функция обладает качественно разными свойствами в зависимости от знака параметра *k*. При его положительных значениях мы наблюдаем экспоненциальный рост функции *х*. При *k* = 0 решение задачи со временем не меняется. Наконец, для отрицательных значений этого



Рис. 34. Варианты эволюции численности одного вида   
при различных соотношениях между рождаемостью и смертностью.

параметра функция *х* монотонно убывает и с течением времени стремится к нулю. Варианты поведения решения задачи изображены на рис. 34. Отметим также, что возрастание и убывание числа ε приводит соответственно, к более резкому или более плавному изменению решения задачи, а изменение начального состояния системы не вносит качественных изменений в поведение исследуемого процесса.

Попытаемся интерпретировать полученные результаты. Отрицательные значения коэффициента *k* соответствуют тому прискорбному случаю, когда смертность вида преобладает над его рождаемостью. При этом в единицу времени численность вида сокращается на определенную величину. В следующий раз опять же умрет большее количество особей, чем родится. Поскольку в данной модели прирост численности вида считается неизменным, то мы наблюдаем его постепенное вымирание. Сей печальный исход характерен для вида, находящегося в крайне неблагоприятных жизненных условиях, вызываемых острой нехваткой пищи, резким ухудшением среды обитания, появлением естественных противников, распространением эпидемий и прочими неприятностями.

Положительные значения прироста численности вида соответствует превышению рождаемости над смертностью. Это означает, что на каком-либо интервале времени рождается большее число особей, чем умирает. Тогда на следующем интервале при том же приросте появится еще большее число особей. Таким образом, наблюдается неограниченный рост численности вида, что характерно для вида, находящегося в идеальных условиях, т.е. в отсутствие противников и конкурентов, при неограниченном запасе пищи и благоприятной среде обитания. Столь радостная ситуация возможна, например, для микроорганизмов, находящихся в питательной среде.

Тривиальный случай нулевого прироста численности означает, что рождаемость и смертность сбалансированы. Число умерших особей здесь компенсируется вновь родившимися, а численность вида остается неизменной.

С математической точки зрения нулевое состояние является положением равновесия динамической системы, характеризуемой уравнением (6.1). При *k* < 0 состояние системы монотонно убывает и стремится к положению равновесия, которое асимптотически устойчиво. При *k* > 0 наблюдается неуклонное удаление системы от положения равновесия.

Описанная модель имеет достаточно очевидный изъян. При положительном приросте вида здесь наблюдается экспоненциальный рост его численности, что, естественно, плохо согласуется с реальностью. В природе возрастание численности вида сдерживается ограничениями на количество имеющейся пищи и свободной территории, наличием естественных противников и конкурентов и т.п. Мы ограничимся рассмотрением эволюции вида в условиях ограниченности поступления пищи. Тогда прирост численности вида в соотношении (6.1) будет уже существенным образом зависеть от функции *х*. Можно предположить, что эта зависимость имеет следующий вид

*k*(*х*) *= а* (*D – q x*) – *b* ,

где *D* *–* количество поступающей пищи, *q* – коэффициент потребления пищи, *b –* естественная смертность вида (не связанная с нехваткой пищи), *а* – удельный прирост численности вида (прирост, соответствующий единице поступающей пищи). При сделанных предположениях рождаемость вида прямо пропорциональна превышению количества поступающей пищи над количеством необходимой пищи (с коэффициентом пропорциональности *а*). В случае нехватки пищи наблюдается соответствующее возрастание смертности вида.

Итак, уравнение состояние системы принимает следующий вид

* =* [(*аD* – *b*) – *а q x*] *x* .  (6.3)

Соотношение (6.3) называется *уравнением Ферхюльста* и описывает также (с точностью до вида коэффициентов) рассмотренные в предшествующей лекции процесс излучения фотонов в одномодовом лазере и изменение концентрации вещества *Х* в системе реакций *А* + *Х* → 2*Х* , *Х* → *В*  при постоянном подводе вещества *А* (см. табл. 6).

Табл. 6. Интерпретации уравнения Ферхюльста.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | характеристика | м о д е л ь  **физическая химическая биологическая** | | |
| 1 | объект исследования | одномодовый  лазер | система реакций  *А* + *Х* → 2*Х* ,  *Х* → *В* | эволюция вида  с ограниченной пищей |
| 2 | функция состояния | число фотонов | концентрация  вещества *Х* | численность вида |
| 3 | ограничение | количество  возбужденных  атомов | количество  исходного  вещества *А* | количество  поступающей  пищи |
| 4 | прирост функции  состояния | излучение  фотонов атомами | синтез  вещества *Х* | рождаемость вида |
| 5 | убыль функции  состояние | уход фотонов  из системы | распад  вещества *Х* | смертность  вида |

Полученное соотношение является частным случаем уравнения Бернулли (5.9), с которым мы познакомились при описании изменения концентрации в реакции второго порядка. Повторяя рассуждения из предшествующей лекции, находим следующий вид решения задачи (6.3), (6.2)



Согласно этому результату при *аD* ≤ *b* решение задачи с неограниченным возрастанием времени для любого начального состояния стремится к нулю, а при *аD* **>** *b* – к величине *х*\* =(*D* – *b*/*а*)/*q* . В последнем случае при выполнения неравенства *х*0**<***х*\* функция *х* монотонно возрастает, а при*х*0**>***х*\* монотонно убывает (см. рис. 34).

В дальнейшем нам придется иметь дело с существенно более сложными уравнениями, не допускающими, к сожалению, аналитического решения. В этой связи было бы желательным установить свойства уравнения (6.3), не прибегая к непосредственному решению задачи.

Отметим, что знак производной функции *х* определяется выражением в квадратных скобках правой части соотношения (6.3). При выполнении неравенства *аD* ≤ *b*  эта производная заведомо отрицательна. Таким образом, функция *х* монотонно убывает. Однако по мере ее приближения к нулю неуклонно стремится к нулю и ее производная. Тем самым скорость убывания функции состояния постепенно замедляется, а ее значение стремится к нулю. При *аD* **>** *b* знак   
производной зависит от текущего состояния системы. Если начальная численность вида *х*0 меньше значения *х*\*, то производная ** в начальный момент времени положительна, а значит, функция *х* возрастает. Такая ситуация наблюдается все время, пока выполняется неравенство *х* **<** *х*\*. Однако по мере приближения *х* к критическому значению *х*\*согласно равенству (6.3) производная ** стремиться к нулю. Это говорит о том, что c ростом *t* значение *x*(*t*) , возрастая, стремится к *х*\*.

При *x*0 **>** *x*\* производная ** в начальный момент времени отрицательна, а следовательно, функция *х* убывает. По мере ее уменьшения значение *х* приближается к *х***\***, а производная ** стремится к нулю. Таким образом, при *t* → ∞ функция *х* монотонно убывает и выходит на состояние *х*\*. Наконец, при *x*0**=** *x*\* производная ** равна нулю, а значит, величина *х* не меняется, оставаясь равной *х*\*. Итак, вне зависимости от начального состояния системы решение уравнения (6.3) стремится к значению *х*\*(см. рис. 35).

Отметим, что нам удалось установить важнейшие качественные свойства исследуемой системы без обращения к его аналитическому решению. Подобным приемом мы и будем пользоваться в дальнейшем, поскольку, как это не прискорбно, факт нахождения аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений следует признать событием крайне редким и являющимся верным свидетельством относительной простоты рассматриваемой системы.



Рис. 35. Численность вида при ограниченности пищи   
всегда стремится к фиксированному значению *х*\*.

Остается, правда, возможность приближенного решения задачи. Надо отметить, что практически все мало-мальски серьезные математические модели исследуются как раз численно, причем с применением вычислительной техники. Однако возможности численных методов в плане анализа общих свойств математической модели и исследования влияния на систему различных входящих в нее величин явно ограничены. В лучшем случае мы с некоторой степенью точности находим решение задачи на фиксированном интервале времени для конкретного набора входных параметров. При этом никакой информации о том, что произойдет с системой впоследствии или при других значениях параметров мы, как это не печально, не получаем. Можно, конечно, провести расчеты многократно. Так обычно и поступают за неимением чего-либо более приемлемого. Однако при этом нет решительно никаких гарантий, что мы не упустим самые интересные события, тем более что многие нелинейные системы имеют весьма неприятную привычку в самый неподходящий момент качественно менять свойства решения при незначительном изменении параметров. Надо также иметь в виду, что наблюдаемое экстравагантное поведение решения зачастую очень легко спутать со всевозможными неполадками численного алгоритма. В этой связи, при анализе моделей желательно пользоваться разумным сочетанием качественных и количественных методов, если, конечно, это возможно (а удается это, мягко говоря, далеко не всегда).

Полученные результаты имеют вполне естественную интерпретацию. Если начальная численность вида достаточно мала, то ограничение на запасы пищи не столь существенно, а количество особей неуклонно растет. Однако при этом непременно возрастает и объем потребляемой пищи (при неизменном ее поступлении). Неуклонно возрастающая нехватка пищи сдерживает рост численности вида. В результате постепенно устанавливается некоторое равновесное значение численности вида *х*\*, которое может поддерживаться при данном соотношении между количеством имеющейся пищи и ее потреблением. Если же изначально численность вида слишком велика, то наблюдается нехватка пищи, что приводит к сокращению численности вида. Однако по мере снижения численности вида уменьшается и потребление пищи. Таким образом, недостаток пищи постепенно снижается, а значит, роль отрицательных факторов, влияющих на поведение системы, постепенно сходит на нет. Так или иначе, со временем устанавливается одно и то же равновесное значение *х*\* численности вида. Варианты эволюции рассматриваемой системы приводятся на рис. 36.



Рис. 36. Варианты эволюции вида с ограниченным поступлением пищи.

Обратимся теперь к исследованию существенно более увлекательной проблемы сосуществования нескольких биологических видов. В этом случае определяющую роль играет принцип взаимодействия видов между собой.

## 2. МОДЕЛЬ "БИОЛОГИЧЕСКАЯ КОНКУРЕНЦИЯ"

Рассмотрим два биологических вида, находящиеся на ограниченной территории. Будем полагать, что ни один из них не оказывает прямого воздействия на другой вид. Однако, потребляя одну и ту же пищу, они непременно вступают в острую конкуренцию между собой в виду ограниченности количества пищи.

Установим математическую модель рассматриваемого процесса. Пусть *xi* есть численность *i*-ого вида. Очевидно, скорость ее изменения будет пропорциональна численности рассматриваемого вида

** ,

где *ki* – прирост численности *i*-ого вида, *i* = 1,2 . В случае неограниченного количества пищи конкуренция между видами отсутствует, а прирост численности вида равен его естественному приросту. При ограничении на количество поступающей пищи прирост вида снижается. Повторяя рассуждения, проведенные для предшествующей модели, получаем уравнения

 ,

где *N* = *D* – (*q*1 *x*1 + *q*2 *x*2) , *D* – количество поступающей пищи,   
*ai* – удельный прирост *i*-ого вида, *bi*– смертность *i*-ого вида, *qi* – потребление пищи *i*-ым видом, *i* = 1,2 .

Итак, рассматриваемый процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений

, (6.4)

где *di* = *ai D – bi –* эффективный прирост *i*-ого вида. Соотношения (6.4) называются *уравнениями конкуренции*. Они поразительно напоминают модель "*химической конкуренции*" и уравнения процессов для двухмодового лазера (см. приложение), хотя это едва ли должно вызывать удивление, поскольку аналогия между различными классами явлений уже была обнаружена ранее для соответствующих процессов с единственной функцией состояния (см. табл. 6).

Предполагается, что в начальный момент времени *t* = 0 численность *i*-ого вида известна и равна *xi*0, т.е. выполняются начальные условия

*xi*(0) = *xi*0 , *i* = 1, 2 . (6.5)

Система дифференциальных уравнений (6.4) с начальными условиями (6.5) и составляет математическую модель рассматриваемого процесса. В виду нелинейности уравнений (6.4) прямое решение задачи затруднительно. Однако, как это ни удивительно, качественное исследование модели можно провести в самом общем виде.

Из соотношения (6.4) найдем выражение

****, *i* = 1, 2 .

Таким образом, справедливы равенства

****.

Вычитая из первого соотношения второе, будем иметь

**** .

где

θ = *d*1/*a*1 *– d*2/*a*2  = *b*2/*a*2 *– b*1/*a*1 .

Тем самым сокращается нелинейный член, определяющий основную сложность уравнений (6.4). В результате мы уверенно продвигаемся к желанной цели.

Полученное ранее равенство может быть преобразовано к виду

****.

Интегрируя это выражение с учетом начальных условий (6.5), установим

****  (6.6)

Предположим для определенности, что выполняется неравенство θ > 0 . Это допущение не нарушает общности ситуации, поскольку за первый из видов мы вправе выбрать тот, у которого отношение *bi /ai*ниже. Совпадение же этих отношений для различных видов маловероятно и с практической точки зрения особого интереса не представляет (как видно из равенства (6.6), в этом случае его левая часть со временем не меняется). Тогда, переходя к пределу в соотношении (6.5)   
находим

****  (6.7)

Условие (6.7) реализуется либо при неограниченном возрастании численности первого вида, либо при стремлении к нулю численности второго вида. Отметим, однако, что с ростом функции *x*1 , начиная с некоторого момента времени, будет выполняться неравенство

*q*1 *x*1 *+ q*2 *x*2 > *d*1/*a*1 .

Тогда в соответствии с равенством (6.4) мы получаем отрицательный прирост численности первого вида, т.е. его уменьшение. Таким   
образом, в данной модели неограниченное возрастание функции *x*1 заведомо не реализуется. Следовательно, условие (6.7) может выполняться исключительно при стремлении к нулю численности второго вида.

Оценим изменение со временем численности первого вида. Поскольку функция *x*2 стремится к нулю при *t* → ∞ , по истечении достаточно большого количества времени на данной территории останется практически только первый вид. Тогда с достаточно большой степенью точности будет выполнено уравнение

 ,

эквивалентное рассмотренному ранее соотношению (6.3). Повторяя приведенные ранее рассуждения, установим, что со временем состояние этой системы будет стремиться к положению равновесия   
*x*1\*= *d*1/(*a*1 *q*1) . Качественное поведение рассматриваемой системы при относительно малых начальных значениях численностей видов изображено на рис. 37.

Очевидно, отношение θ*i*= *bi /ai* характеризует жизнестойкость вида. Полученные результаты показывают, что в процессе борьбы за существование менее жизнестойкий вид (тот, у которого смертность высока, а прирост мал) вымирает, а численность более жизнестойкого вида со временем стабилизируется на некотором уровне, обеспечивающем баланс между естественным приростом его численности и количеством имеющейся пищи.



Рис. 37. Изменение численности видов в модели "*биологическая конкуренция*".

Естественно, природа не позволяет разыгрывать описанную выше драматическую ситуацию. Если бы на самом деле два вида рискнули вступить между собой в прямую конкуренцию, то со временем более приспособленный вид непременно вытеснил бы другой. Аналогичный результат наблюдается и в случае конкуренции трех и более видов (см. приложение). Учитывая значительную продолжительность существования жизни, мы бы давно уже пришли к исходу, при котором остается более приспособленный вид. Отметим, однако, что в биологическом мире наблюдается ярко выраженная специализация, что характерно для рассматриваемой в приложении модели "*экологическая ниша*".

К сожалению, условия применимости модели "*биологической конкуренции*" может искусственно создать доблестный "властелин природы", решившись по недомыслию перемещать виды из одного место в другое. Подобная ситуация сложилась, к примеру, в Австралии, куда некие умники завезли кроликов, ставших конкурентами   
австралийским овцам. Довольно скоро выяснилось, что кролики существенно превосходят овец по плодовитости. Последствия не замедлили сказаться ...

Для полноты впечатления было бы не худо рассмотреть и вырожденный случай, соответствующий равенству θ1 = θ2 , когда оба вида обладают равной жизнестойкостью. При этом соотношение (6.6) принимает вид

****

откуда после возведения в степень можно найти функцию

,

где константа *с* однозначно определяется начальными состояниями системы. В результате второе уравнение (6.4) записывается следующим образом

 .

Выражение в круглых скобках здесь является строго возрастающей функцией величины *x*2 . Если изначально оно меньше отношения *d*2/*a*2, то правая часть последнего равенства положительна. Тогда функция *x*2 возрастает и будет возрастать до тех пор, пока величина в квадратных скобках остается положительной. Следовательно, со временем численность второго вида стремится к единственному решению алгебраического уравнения

 .

Аналогичный результат (со сменой типа монотонности) получается и в том случае, когда упомянутое выше выражение изначально окажется больше или равно значения *d*2/*a*2 . Для нахождения предельной численности первого вида достаточно воспользоваться установленным выше соотношением между численностями видов.

Итак, в случае одинаковой жизнестойкости видов ни один из них не вымирает, а численность каждого из них со временем принимает некоторое значение, соответствующее возможностям поддержания данного вида. Вытеснения одного вида другим не происходит, поскольку фактически в данном случае вся популяция оказывается однородной, т.е. два вида ведутся себя как единое целое. Если изначально численность одного из видов преобладает, то и в дальнейшем его преобладание сохраниться. Тем самым в данном случае имеется не один исход развития событий, а целое множество положений равновесия. Реализация конкретного положения равновесия определяется начальным состоянием системы.

#### **Компьютерный эксперимент. Биологическая конкуренция.**

Обратиться к лабораторной работе "*Биологическая конкуренция*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты с произвольным набором коэффициентов уравнений и малыми начальными численностями видов. Установить вымирание слабейшего вида.

2. Оставляя без изменения коэффициенты уравнений, возобновить расчеты с достаточно большими начальными состояниями системы. Убедиться в том, что при разных значениях начальной численности видов система выходит в разные положения равновесия.

3. Поменять коэффициенты уравнений таким образом, чтобы вымирал второй вид.

4. Провести расчеты для случая, когда виды равны между собой по жизнестойкости. Обнаружить возрастание популяции при малых начальных значениях численностей видов и сокращение популяции в том случае, когда начальные численности обоих видов достаточно велики.

## 3. МОДЕЛЬ "ХИЩНИК - ЖЕРТВА"

Рассмотрим другую форму сосуществования двух биологических видов, когда первый из них служит пищей для второго. Если бы в данной среде обитал только первый вид (жертва), то он имел бы естественный прирост ε1 , который считается постоянным и положительным (предполагается, что жертвы не испытывают недостатка в пище). Тогда в отсутствии хищников наблюдался бы экспоненциальный рост численности жертв, как это было в рассмотренной ранее модели эволюции вида при неограниченном количестве пищи. Если же второй вид (хищники) существует изолированно, то из-за нехватки пищи (т.е. жертв) он имел бы отрицательный прирост численности ε2 – коэффициент вымирания хищников в отсутствии жертв. Исходом здесь было бы полное вымирание хищников.

При сосуществовании видов на ограниченной территории они оказывают серьезное влияние друг на друга. Очевидно, прирост численности жертв должен сократиться, причем тем больше, чем выше число хищников. Это объясняется тем, что большее количество хищников нуждается в соответствующем количестве пищи, в качестве которой приходится выступать многострадальным жертвам. С другой стороны, прирост хищников должен возрасти тем сильнее, чем выше численность жертв, поскольку в этих условиях большее число хищников будет обеспечено полноценной пищей. В результате получаем дифференциальные уравнения

, (6.8)

где коэффициенты γ1 и γ2 характеризуют изменения прироста жертв и хищников за счет их естественного взаимодействия между собой. Уравнения (6.8) с соответствующими начальными условиями образуют широко известную математическую модель "*хищник - жертва*".

Для исследования полученной системы воспользуемся достаточно распространенным приемом, связанным с *заменой переменных*. Определим величины

τ = *a t* , *u*(τ) *= b* *x*1(*t*) , *v*(τ) = *c* *x*2(*t*) ,

где константы *a*, *b* и *c* подбираются таким образом, чтобы получаемые уравнения имели как можно более простой вид. В результате установим соотношения



где *u*' *=* ∂*u/*∂*t* , *v*' *=* ∂*v/*∂*t* .

Определив параметры

*a* = ε1 , *b* = γ2/ε1 , *c* = γ1/ε1 , *m* = ε2/ε1 ,

получаем соотношения

, (6.9)

называемые *уравнениями Вольтерра - Лотки*. Системы (6.9) и (6.8) имеют один и тот же смысл. Действительно, функции состояния *u* и *v*, а также независимая переменная отличаются от величин *x*1 , *x*2 и *t* соответственно исключительно постоянными множителями. Таким образом, мы по-прежнему имеем дело с численностями видов и временем, но рассматриваемыми в другом масштабе.

Очевидно, уравнения (6.9) имеют два положения равновесия   
*u*1 = 0 , *v*1 = 0 и *u*2 = 1 , *v*2 = 1 . Первое из них тривиально, реализуется при отсутствии обоих видов и не представляет никакого практического интереса. Существенно более интересно второе положение равновесия системы. Здесь число вновь родившихся за некоторое время жертв компенсируется их числом, съеденным за то же самое время хищниками. В свою очередь, у хищников рождаемость и смертность также   
совпадает. Вследствие этого численность обоих видов со временем не меняется, т.е. система находится в состоянии динамического равновесия.

Рассмотрим поведение исследуемой системы вне положения равновесия. Отметим, что численности видов заведомо не отрицательны. Равенство нулю начальной численности хищников при положительном значений начальной численности жертв приводит к уравнению *u' = u* , решение которого экспоненциально возрастает. Таким образом, в отсутствии естественных противников и ограничений на пищу жертвы неограниченно размножаются. Отсутствие жертв в начальный момент времени позволяет получить следующее уравнение относительно численности хищников *v' = -mv* . Отсюда следует, что в отсутствии пищи хищники постепенно вымирают. Для дальнейших исследований достаточно рассмотреть систему с положительными начальными состояниями.

Как видно из уравнений (6.9), существует четыре области в фазовой плоскости, различающиеся между собой в смысле поведения рассматриваемой системы (см. рис. 38). Если в некоторый момент времени *t* выполняются неравенства

0 < *u*(*t*) < 1 , 0 < *v*(*t*) < 1 , (6.10)

то правая часть первого уравнения (6.9) положительна, а второго – отрицательна. Тогда справедливы неравенства *u*'(*t*) > 0 , *v*'(*t*) < 0 , а значит, функция *u* будет со временем возрастать, а *v* – убывать (см. рис. 39).



Рис. 38. Направления эволюции системы в модели "*хищник*-*жертва*".

Подобное поведение системы сохраняется все время, пока выполнены соотношения (6.10). Эти условия могут нарушиться либо в том случае, когда в процессе возрастания значение функции *u* превысит единицу, либо при достижении функцией *v* нуля по мере ее убывания. Однако приближение значения *v* к нулю сопровождается и стремлением к нулю ее производной в соответствии со вторым уравнением (6.9). Таким образом, достижение функцией *v* нуля могло бы быть только асимптотическим. Однако с ростом функции *u* и убыванием *v* производная *u*'не только остается положительной, но даже растет. Следовательно, рано или поздно значение *u* превысит единицу, и мы окажемся в области, характеризуемой неравенствами

*u*(*t*) > 1 , 0 < *v*(*t*) < 1 . (6.11)

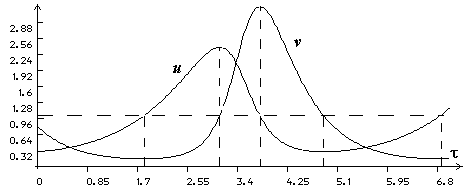


Рис. 39. Изменение численностей жертв и хищников   
при значениях параметров *u*0 = 0.3 , *v*0 = 0.8 , *m=* 2 .

При этих условиях производные обеих функций положительны, а значит, их значения со временем будут возрастать. Такое поведение наблюдается все время, пока выполнены соотношения (6.11). Очевидно, с ростом функции *v* она когда-либо превысит значение единицы, и в результате будут выполнены условия

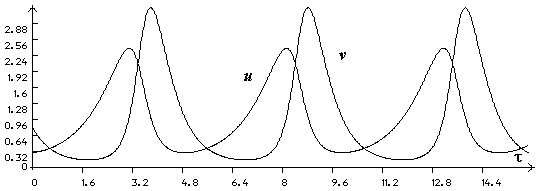
*u*(*t*) > 1 , *v*(*t*) > 1 (6.12)

В дальнейшем наблюдается убывание функции *u* при одновременном росте величины *v*. Ситуация изменится лишь при нарушении одного из соотношений (6.12). Естественно по мере убывания *u* в конце концов она станет меньше единицы, и будут выполнены неравенства

0 < *u*(*t*) < 1 , *v*(*t*) > 1 . (6.13)

Это означает, что обе рассматриваемые функции убывают. Учитывая, что по мере приближения функции *u* к нулю стремится к нулю и ее производная, заключаем, что рано или поздно наступит момент времени, когда функция *v* станет меньше единицы при положительном значении *u*. Таким образом, вновь будут выполнены соотношения (6.10), а значит, описанный процесс повторяется.

Можно установить, что решения уравнений (6.9) оказываются периодическими функциями (см. рис. 40). В фазовой плоскости им соответствуют замкнутые кривые. С положением равновесия подобного типа (центром) мы уже встречались при исследовании свободных незатухающих механических и электрических колебаний. В то же время, тривиальное положение равновесия (начало координат в фазовой плоскости) обладают принципиально иными свойствами. Очевидно, к нему стремятся лишь те состояния, которые лежат на координатной оси *v* в фазовой плоскости. Другие же фазовые кривые могут некоторое время приближаться к началу координат, но впоследствии неминуемо удалятся от него (см. рис. 37). Таким образом, мы имеем дело с неустойчивым положением равновесия, которое является *седлом*.

  
Рис. 40. Функции состояния в модели  
"*хищник-жертва*" являются периодическими.

Проанализируем полученные результаты. Предположим, что в начальный момент времени численности жертв и хищников сравнительно малы. Ввиду малого количества жертв число хищников падает, а жертвы оказываются в более благоприятном положении из-за незначительного количества естественных врагов. В результате их поголовье возрастает. Наступление второго этапа обусловлено тем, что малое число хищников при возросшей численности жертв уже не будет испытывать недостатка в пище. Число хищников начинает расти, причем все быстрее и быстрее за счет наблюдаемого пока еще роста числа жертв. Третий этап начинается в тот момент времени, когда естественный прирост численности жертв компенсируется их уничтожением хищниками, число которых неуклонно растет. По мере дальнейшего увеличения популяции хищников поголовье жертв начинает постепенно снижаться, причем скорость возрастания числа хищников замедляется с уменьшением числа жертв. В конце концов, наступает момент, когда для возросшего числа хищников уже не хватает пищи, вследствие чего их количество начинает сокращаться. Однако продолжает уменьшаться и поголовье жертв, поскольку хищников остается еще слишком много. Скорость убывания жертв снижается за счет уменьшения численности хищников. Тогда поголовье жертв сокращается до некоторого минимального значения, после чего из-за продолжающегося уменьшения числа хищников количество жертв начинает расти. Это говорит о наступлении нового цикла рассматриваемого процесса с возвращением к исходному этапу.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "хищник – жертва".**

Обратиться к модели "*Хищник-жертва*". Провести следующий анализ:

1. Выполнить расчеты с произвольным набором параметров задачи. Установить периодическое изменение численностей обоих видов.

2. Задать следующие значения параметров задачи: *х*10 = 2 , *х*20 = 3 , ε1 = 3 , γ1 = 1 , ε2 = 2 , γ2 = 1 . Убедиться в том, что система находится в положении равновесия.

3. Провести исследование влияния начальной численности жертв на результаты расчетов, выбирая значения остальных параметров такими же, как в предшествующем варианте счета. Задать последовательно следующие значения параметра *х*10 : 0.3 , 0.8 , 1.3 , 2 , 2.5 , 3 , 4 , 6 . Обратить внимание на немонотонный характер зависимости амплитуды колебания от начального состояния системы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Модель "*биологическая конкуренция*" имеет естественные физические и химические аналоги, а уравнения Вольтерра – Лотки, лежащие в основе модели "*хищник-жертва*", описывают также изменение концентраций соответствующей системы автокаталитических реакций и изменение урожайности сельскохозяйственной культуры и плодородия почвы. Конкуренция произвольного числа видов в борьбе за одну и ту же пищу приводит к столь же печальным последствиям, что и в случае двух видов. Если же в модели "*биологической* *конкуренция*" допустить, что каждый вид, потребляя общую пищу, отдает некоторое предпочтение своему типу пищи, то получается модель "*экологическая* *ниша*", которая допускает сосуществование обоих видов. В модели "*симбиоз*" существование каждого вида возможно исключительно в присутствии второго вида. В результате виды либо вымирают, либо неограниченно размножаются. Последний эффект можно устранить при учете ограниченности пищи.

### **1. Модель "химическая конкуренция".**

Как мы уже знаем из предыдущей лекции, система химических реакций



при условии постоянного подвода исходного вещества *А* описывается уравнениями

 .

При выполнении условия  мы приходим к системе, аналогичной (6.4). На основе проведенного выше анализа заключаем, что со временем одно из промежуточных веществ (какое именно – зависит от сочетания параметров системы) полностью прореагирует, а второе достигнет некоторого предельного значения.

### **2. Двухмодовый лазер.**

В предшествующей лекции было установлено, что уравнение типа (6.4) описывает также излучение фотонов в двухмодовом лазере. Полученные результаты говорят о том, что со временем одна из мод лазера непременно подавит другую. Таким образом, со временем лазер будет излучать фотоны одной и той же длины волны.

### **3. Система реакций Лотки.**

Уравнения (6.8) при γ1 = γ2 (снижение численности жертв и повышение численности хищников за счет съедания первых вторыми одинаково) с точностью до физического смысла входящих в них величин описывает систему реакций

,

рассмотренных в предшествующей лекции. На основе проведенного анализа заключаем, что концентрации промежуточных продуктов *Х* и *Y* со временем будут меняться периодически, подобно изменению численностей хищников и жертв.

### **4. Колебания урожайности и плодородия.**

Рассмотрим некоторую сельскохозяйственную культуру. Ее урожайность в значительной степени зависит от содержания минеральных веществ в почве. В свою очередь, плодородие почвы связано с урожайностью культуры, поскольку растения имеют устойчивую привычку потреблять содержащиеся в почве питательные вещества. Будем полагать, что в отсутствии минеральных веществ урожайность культуры *х*2 убывает со скоростью ε2 , а в отсутствии растений поле восстанавливает свое плодородие *х*1 со скоростью ε1 . Чем выше урожайность культуры, тем больше потребляется минеральных веществ, что приводит к пропорциональному (с коэффициентом пропорциональности γ1) снижению плодородия почвы. С другой стороны, рост урожайности культуры прямо пропорционален (с коэффициентом пропорциональности γ2) плодородию почвы. В результате вновь приходим к уравнениям (6.8).

Зная свойства решения этих соотношений, заключаем, что урожайность культуры и плодородие почвы меняются со временем периодически. Рост урожайности со временем приводит к истощению почвы, что в свою очередь, влечет снижение урожайности. По мере сокращения числа растений, произрастающих на поле, происходит постепенное восстановление содержания минеральных веществ в почве, что со временем приводит к росту урожайности.

Сравнительный анализ химической, биологической и сельскохозяйственной моделей, описываемых уравнениями (6.8), приводится в таблице 7.

Табл. 7. Аналогия между химической, биологической   
и сельскохозяйственной моделями типа "*хищник*-*жертва*".

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **обозна-чение** | химическая модель | биологическая модель | сельскохозяйственная  модель |
| 1 | *х*1 | концентрация  1 продукта | численность жертв | плодородие  почвы |
| 2 | *х*2 | концентрация  2 продукта | численность  хищников | урожайность  культуры |
| 3 | ε1 | скорость образования 1 продукта | прирост жертв | восстановление  плодородия |
| 4 | ε2 | скорость распада 2 продукта | убыль хищников | снижение  урожайности |
| 5 | γ1 | скорость  преобразования  1 продукта в 2 | убыль жертв  за счет съедания их хищниками | истощение плодородия с ростом урожайности |
| 6 | γ2 | скорость  преобразования  2 продукта 1 | прирост хищников  за счет потребления жертв | рост урожайности за счет минеральных веществ в почве |

### **5. Биологическая конкуренция многих видов.**

Конкуренция произвольного числа биологических видов по аналогии с системой (6.4) описывается уравнениями

 .

Очевидно, справедливо соотношение

****.

Предположим, что индекс *j* соответствует тому из видов, у которого отношение *di* /*ai*принимает наибольшее значение. Тогда по аналогии с соотношением (6.6) устанавливается равенство

****

откуда следует, что *i*-ый вид со временем вымирает. Таким образом, сосуществование многих видов, потребляющих одну и ту же пищу, приводит к выживанию лишь одного из видов, оказавшегося наиболее жизнестойким.

Аналогичные результаты могут быть получены и для аналогов рассматриваемой модели, относящихся к другим предметным областям. В частности, для многомодового лазера наблюдается подавление одной из мод всех остальных вне зависимости от их количества.

### **6. Модель "экологическая ниша".**

Мы убедились, что сосуществование на ограниченной территории двух различных видов, потребляющих одну и ту же пищу, неминуемо ведет к вымиранию менее приспособленного вида. Тем не менее, в природе наблюдается неисчислимое многообразие живых организмов. Это свидетельствует о наличии некоторого механизма, вследствие чего сосуществование нескольких видов оказывается возможным. В частности, выживание обоих видов можно было бы ожидать в том случае, когда виды оказывают некоторое предпочтение какому-либо своему типу пищи, что соответствует модели "*экологическая ниша*". Она характеризуется следующей системе дифференциальных уравнений

,

где *х****i*** – численность *i*-ого вида, ε*i*= (*ai*1*D*1 + *ai*2*D*2 – *bi* )–эффективный прирост численности *i-*ого вида,α*ij***=** (*ai*1 *qj*1 + *ai*2 *qj*2 )– эффективный коэффициент потребления*i*-ым видом пищи*j*-ого сорта,*Dj* – количество *j*-ой пищи, *aij*– удельный прирост *i-*ого вида, определяемый потреблением *j*-ой пищи, *qij* – потребление*i*-ым видом пищи*j*-ого сорта,*i*, *j*= 1,2.Согласно этим соотношениям каждый из видов имеет положительный естественный прирост численности, однако он снижается за счет ограниченности пищи. Имеется два типа пищи, которые потребляются обоими видами, но в разной степени, определяемой коэффициентами α*ij* . Количество потребляемой пищи считается прямо пропорциональным численности видов.

Анализ этой модели проводится в последующей лекции (в экономической интерпретации), где (применительно к биологическому случаю) будет показано, что при выполнении условий

****,

означающих, что каждый из видов отдает предпочтение своему типу пищу, оба конкурента могут сосуществовать без ущерба друг для друга. Этим и объясняется использование для данной модели наименования "*экологическая ниша*". Подобные результаты проливают определенный свет на чрезвычайно высокую степень специализации, наблюдаемую в живой природе.

#### **Компьютерный эксперимент. Экологическая ниша.**

Обратиться к модели "*Экологическая ниша*". Провести следующий анализ:

1. Пров*е*сти расчеты для случая, когда первый вид вымирает для любых начальных состояний системы.

2. Провести расчеты для случая, когда второй вид вымирает для любых начальных состояний системы.

3. Провести расчеты для случая, когда при одних начальных состояниях системы вымирает первый вид, а для других – второй.

4. Про*в*ести расчеты для случая, когда оба вида не вымирают.

### **7. Модель "симбиоз".**

Рассмотрим взаимодействие двух видов в условиях симбиоза, когда каждый из видов оказывает благоприятное воздействие на второй вид. Предполагается, что *i*-ый вид вымирает в отсутствии второго вида с некоторой скоростью ε*i*, *i* = 1,2. В то же время, чем больше численность другого вида, тем выше прирост данного вида. Обозначив через γ*i* коэффициент влияния *j*-ого вида на *i*-ый, определим следующий вид приростов численности *ki* = - *i**i* *xj* , *i* ≠ *j* . В результате математическая модель рассматриваемой системы характеризуется дифференциальными уравнениями



которые отличаются от соотношений (6.8) лишь знаком в первом уравнений. Тем не менее, эти модели обладают существенно разными свойствами. Можно показать, что если начальные численности видов достаточно малы, то популяция вымирает. В противном случае наблюдается неограниченное возрастание численности обоих видов.

#### **Компьютерный эксперимент. Симбиоз.**

Обратиться к модели "*симбиоз*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты для малых начальных состояний системы. Убедиться в том, что оба вида вымирают.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы. Убедиться в том, что численности обоих видов неограниченно возрастают.

3. Задавая большой численность одного вида и малой численность второго вида, обнаружить режим, когда численности обоих в конце концов неограниченно возрастают, хотя одна из функций состояния меняется не монотонна.

4. Подобрать начальные состояния системы таким образом, чтобы оба вида вымирали, но численность одного из них менялась не монотонно.

5. Подобрать начальные состояния системы таким образом, чтобы численности обоих видов вообще не менялись со временем.

### **8. Модель "симбиоз с ограниченной пищей".**

В предшествующей модели при достаточно большой численности обоих видов происходит их неуклонный рост, что плохо согласуется с реальной ситуацией. Сдерживание роста численности видов может происходить за счет ограниченности пищи. Предполагая, что снижение прироста зависит от численности видов квадратично, а каждый вид питается своей пищей, приходим к следующим уравнениям:

,

где коэффициенты β1 и β2 характеризуют потребление пищи. Выбрав квадратичный характер зависимости в выражении, описывающем снижение прироста численности вида из-за нехватки пищи при линейной зависимости в члене, характеризующем симбиоз, мы подчеркиваем, что при достаточно большой численности видов отрицательной влияние недостатка пищи будет преобладать над положительным влиянием симбиоза.

Если численности обоих видов достаточно малы, то ограничениями на количество пищи можно пренебречь, а поведение системы аналогично предшествующему случаю, т.е. вся популяция вымирает. Если численность хотя бы одного из видов сравнительно велика, то начинается рост численности второго вида, и со временем начинается сказываться нехватка пищи. При этом либо недостаток пищи и низкая численность обоих видов приведет к их полному вымиранию, либо возможна стабилизация их численности.

#### **Компьютерный эксперимент. Симбиоз с ограниченной пищей.**

Обратиться к модели "*симбиоз с ограниченной пищей*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты для малых начальных состояний системы. Убедиться в том, что оба вида вымирают.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы. Убедиться в том, что при определенных значениях параметров системы численности обоих видов со временем стабилизируются.

3. Провести расчеты для случая, когда численность одного вида мала, а другого – относительно велика. Обнаружить как вымирание видов, так и стабилизацию их численности.

## КОММЕНТАРИИ

Разнообразные математические модели биологических систем описываются в монографиях Р. Беллмана [9], В. Вольтерра [20], А.Б. Котовой [51], Дж. Марри [75], Ю.М. Романовского, Н. В. Степановой и Д. С. Чернавского [116], Дж. М. Смита [123], [124], М. Уильямсона [130] (см. также [32], [48], [85], [86], [108], [122]). Проблемы математического моделирования задач   
физиологии и медицины рассматриваются Г. И. Марчуком [76], Д. И. Швитра [146], (см. также [86]). С математическим моделированием различного   
рода экологических систем можно познакомиться, например, в работах   
Е.В. Данилиной [31], Г. И. Марчука [77], В. В. Пененко и А. Е. Алояна [102],   
Л. А. Петросяна и В. В. Захарова [103], Р. А. Полуэктова [108],   
Дж. М. Смита [124] и др.

В лекции № 14 будет показано, что задачи борьбы за существование биологических видов с учетом их миграции по некоторой территории характеризуются уравнениями с частными производными.

Конкуренция видов может происходить не только за пищу, но и за среду обитания. Однако при математическом анализе системы предмет биологической конкуренции принципиальной роли не играет.

Переход к *безразмерным переменным* от системы (6.8) к уравнениям (6.9) позволил существенным образом сократить числа параметров системы, а значит, упростить процедуру качественного исследования рассматриваемой задачи. Если в исходной постановке уравнения состояния включали в себя четыре коэффициента, то в преобразованном виде модель содержит единственный параметр *m*, не оказывающий к тому же существенного влияния на качественное поведения системы. Серьезным упрощением уравнений состояния и сокращением числа параметров системы и объясняется достаточно высокая популярность указанного приема.

В последующих лекциях выяснится, что многие модели динамики популяции (помимо установленных ранее физических и химических аналогов) могут быть естественным образом распространены и на социальные явления. Мы в очередной раз убедимся в том, что различные науки, в сущности, занимаются исследованием одних и тех же процессов, хотя и дают им совершенно разную интерпретацию. Математика же, изучая непосредственно форму, а не содержание, способна, как отвечать на отдельные частные вопросы, так и устанавливать единую природу, казалось бы, абсолютно разных явлений.

# Лекция № 7 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерности между ними, которые дают нам ключ к пониманию явлений природы.

Альберт ЭЙНШТЕЙН

В данной лекции изучаются два класса достаточно простых экономических процессов, связанных с взаимоотношениями различных экономических субъектов и с некоторыми формами рыночных отношений. Исследование первого класса моделей начинается с исследования одной фирмы, выпускающей товар при наличии на него ограниченного спроса. В модели конкурентной борьбы рассматриваются две конкурирующие фирмы в условиях ограниченного спроса на выпускаемую продукцию. Если они выпускают один и тот же товар, то более слабая фирма со временем разоряется. Если же каждая из них ориентируется на выпуск своего товара, то фирмы могут сосуществовать.   
В приложении рассматриваются также модели экономического сотрудничества и "*рэкетир* – *предприниматель*", являющиеся экономическими аналогами   
рассмотренных ранее моделей "*симбиоз*" и "*хищник* – *жертва*".

В качестве функций состояния второго класса моделей выбираются   
цена на товар, доходы населения и объем выпускаемой продукции. Исследуется изменение этих характеристик со временем в зависимости от формы   
управления экономикой. Рассматриваются модели свободного и монополизированного рынка, а также (в приложении) модель инфляции, характерная для жесткого государственного регулирования. Оказывается, что колебания цен, доходов населения и объема производства могут быть описаны уравнениями Вольтерра – Лотки, с которыми мы уже сталкивались ранее.

## 1. РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ФИРМЫ

Рассмотрим сначала простейшую экономическую систему, представленную одной фирмой. Исследуемый процесс характеризуется *оборотным капиталом* фирмы *х*, который меняется со временем. Предполагается, что вся денежная сумма, полученная от продажи производимого товара, вкладывается в производство. Скорость изменения капитала определяется соотношением между доходами и расходами фирмы. Таким образом, получаем соотношение

 ,

где величины *А* и *В* характеризуют соответственно, доходы и расходы фирмы в единицу времени. Их значения, по-видимому, можно считать пропорциональными значениям капиталов: чем больше капитал фирмы, тем большие изменения могут произойти их за фиксированный промежуток времени. В результате получаем соотношения *A = a x* ,   
*B = b x* , где положительные константы *a* и *b* являются параметрами процесса и характеризуют прирост доходов и расходов фирмы. Итак, рассматриваемый процесс описывается дифференциальным уравнениям

** **=**  *k x* , (7.1)

где коэффициент *k* **=** *a*–*b*называется *приростом* капитала, характеризует изменение капитала фирмы в единицу времени и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Уравнение (7.1) рассматривается с начальным условием

*х*(0) = *х*0 , (7.2)

где стартовый капитал *х*0является параметром задачи, принимающим любые положительные значения.

При постоянном значении прироста капитала решение задачи (7.1), (7.2) имеет вид

*x*(*t*) = *x*0 exp(*k* *t*) .

При положительных значениях прироста капитала доходы фирмы превышают ее расходы, и мы наблюдаем экспоненциальный рост функции *х*. При *k* = 0 доходы совпадают с расходами, а решение задачи со временем не меняется. Наконец, для отрицательных значений этого параметра функция *х* монотонно убывает, что соответствует случаю разорения фирмы.

Для более точного описания исследуемого процесса необходимо учесть ограничения на потребление производимых товаров. В этом случае прирост капитала, по-видимому, будет уменьшаться с ростом функции *х*. Действительно, чем больше капитал фирмы, тем больше объем выпускаемой продукции, а значит, тем сильнее падение спроса на товары из-за неминуемого насыщения рынка. Мы принимаем следующую зависимость прироста капитала от величины *х*

*k*(*х*) *= а* (*D – q x*) – *b* ,

где *D* *–* спрос на выпускаемую продукцию (неизменное количество товара, требуемое в единицу времени), *q* – количество товара, выпускаемое на единицу вложенного капитала, *b –* расходы фирмы, связанные с производством товара и не зависящие от количества проданного товара, *а* – прибыль, получаемая от продажи единицы товара. Таким образом, доходы фирмы определяются соотношением между спросом и предложением. Если спрос превышает предложение, то все товары раскупаются, и в случае превышения доходов над расходами прирост капитала оказывается положительным

Итак, уравнение состояние системы принимает следующий вид

* =* [(*аD* – *b*) – *а q x*] *x* . (7.3)

Таким образом, мы получаем хорошо известное уравнение Ферхюльста. При выполнении неравенства *аD* **>** *b* , когда доходы, получаемые от продажи товара, превышают расходы фирмы, для любого начального состояния системы (стартового капитала) капитал фирмы со временем стремится к величине *х*\* =(*D* – *b*/*а*)/*q* . При этом, если стартовый капитал фирмы достаточно мал, т.е. справедливо неравенство *х* < *х*\* , то спрос превышает предложение, доходы фирмы растут, и она расширяет свое производство. Однако по мере насыщения рынка товарами прирост капитала снижается. Если же начальный капитал фирмы столь велик, что выполняется неравенство *х* > *х*\* , то наблюдается перепроизводство товаров (вспомним, что в рамках данной модели все денежные средства вкладываются в производство единственного товара). Поскольку не вся производимая продукция раскупается, фирма терпит убытки и постепенно сворачивает производство. По ходу восстановления баланса между спросом и предложением снижение капитала фирмы сокращается. Сравнительный анализ различных интерпретаций уравнения Ферхюльста приводится в таблице 8.

Теперь нам предстоит познакомиться с различными формами взаимоотношений между двумя экономическими субъектами.

## 2. МОДЕЛЬ "ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КОНКУРЕНЦИЯ"

Рассматриваются две фирмы, выпускающие один и тот же товар и ориентированные на одного и того же потребителя. Предполагается, что в случае отсутствии проблем со сбытом обе фирмы имеют некоторую прибыль, т.е. затраты на изготовление или приобретение продукции с лихвой окупаются в результате ее продажи. Считается, что весь имеющийся в наличии капитал вкладывается в производство. Таким образом, получив дополнительные средства от продажи товаров, фирмы расширяютпроизводство, а при снижении получаемой прибыли выпуск товаров соответственно сокращается.

Табл. 8. Интерпретации уравнения Ферхюльста.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | характеристика | м о д е л ь  физическая химическая биологическая экономическая | | | |
| 1 | объект  исследования | одномодовый  лазер | система реакций  *А* + *Х* → 2*Х*   *Х* → *В* | эволюция вида  с ограниченной  пищей | эволюция фирмы  с ограниченным спросом |
| 2 | функция состояния | число  фотонов | концентрация  вещества *Х* | численность вида | капитал фирмы |
| 3 | ограничение | количество  возбужденных  атомов | количество  исходного вещества *А* | количество  поступающей пищи | уровень спроса |
| 4 | прирост функции состояния | излучение  фотонов атомами | синтез вещества | рождаемость вида | расширение производства |
| 5 | убыль функции  состояние | уход фотонов  из системы | распад вещества *Х* | смертность вида | падение производства |

В качестве функций состояния системы выбираются значения   
*x*1 и *x*2 , соответствующие капиталам фирм. Очевидно, скорость их   
изменения будет пропорциональна величине капитала – чем больше денежных средств имеет фирма, тем больше она выпускает продукции, а следовательно, тем большую прибыль она получит в единицу времени. Тогда рассматриваемый процесс описывается уравнениями

** ,

где *ki* – прирост капитала соответствующей фирмы.

Если вся продукция фирмы реализуется, то прирост капитала *ki* считается равным некоторому положительному значению *i* , характеризующему эффективность производства. Как известно, соответствующие уравнения имеют экспоненциальные решения, т.е. при   
неограниченном потреблении товара доходы фирм экспоненциально возрастают со временем к великой радости их владельцев.

Естественно, такая трогательная ситуация на практике не реализуется, поскольку число возможных покупателей, как это не печально, заведомо ограничено. Очевидно, чем больше выпускается товара, тем меньше шансов обеспечить его полный сбыт в условиях ограниченного потребления. Таким образом, снижение прироста доходов фирм будет пропорционально сумме капиталов обеих фирм, т.е. справедливо равенство

*ki =* *i –* (*x*1 + *x*2)/*i* 

где коэффициент β*i* здесь характеризует эффективность сбыта производимый продукции и связан с организацией рекламы, культурой   
обслуживания и т.п. Таким образом, чем выше эффективность сбыта продукции, тем в меньшей степени возникающие проблемы с реализацией произведенного товара сказываются на скорости изменения   
капитала фирмы. В результате получаем уравнения

**** , *i* = 1,2,(7.3)

которые и составляют основу модели "*экономическая конкуренция*".

Полученные уравнения достаточно близки к тем, что рассматривались в предшествующей лекции при описании процесса сосуществования двух биологических видов, потребляющих одну и ту же   
пищу, и обладают соответствующими свойствами. Для качественного поведения системы определяющую роль здесь играют произведения ε*i*β*i*эффективности производства и сбыта товара (см. рис. 41). Та   
фирма, у которой производство и сбыт товара осуществляется менее эффективно, неминуемо разоряется.



Рис. 41. Фазовые кривые для модели конкуренции.

При ε1β1 > ε2 β2 разоряется более слабая вторая фирма (см. рис. 41 а). В том случае, когда стартовые капиталы обеих достаточно малы, сначала обе фирмы полностью реализуют свою продукцию, богатеют и расширяют свое производство. Однако по мере насыщения рынка товарами первая фирма постепенно вытесняет своего более слабого конкурента (кривая 1). Ее капитал со временем стабилизируется на величине, равной ε1β1 , соответствующей уровню спроса на выпускаемую продукцию. Если стартовые капиталы обеих фирм слишком велики, то рынок перенасыщен товарами. Фирмы сворачивают производство вплоть до того момента времени, когда будет восстановлен баланс между спросом и предложением (кривая 2). После этого в условиях конкурентной борьбы побеждает более сильная первая фирма. Если изначально стартовый капитал более конкурентоспособной фирмы слишком велик и намного превышает стартовый капитал второй фирмы, то в процессе сокращения производства слабая фирма разоряется раньше, чем наступит баланс между спросом и предложением. При этом фазовая кривая не попадет в зону конкурентной борьбы, представляющей собой трапецию, ограниченную прямыми  *k*1 = 0 и *k*2 = 0 . Обе функции состояния будут монотонно убывать, причем вторая из них стремится к нулю, а первая – к ненулевому положению равновесия (кривая 3). Если же суммарный стартовый капитал фирм будет не очень мал и не очень велик, начальное состояние системы оказывается в зоне конкурентной борьбы. В этом случае обе функции состояния меняются монотонно, причем первая из них, возрастает и стремится к положению, а вторая – убывает до нуля (кривая 4).

При выполнении неравенства ε1β1 < ε2β2 в процессе конкурентной борьбы побеждает вторая фирма. Поведение системы при этом аналогично предыдущему с той лишь разницей, что фирмы меняются местами (см. рис. 41 б).

Равенство ε1β1 = ε2β2 означает, что фирмы обладают одинаковой конкурентоспособностью (см. рис. 41 в). Ни одна из них не в состоянии вытеснить своего конкурента. Если стартовые капиталы фирм малы, то обе они расширяют свое производство вплоть до насыщения рынка товарами (кривая 1). Если товары на рынке в избытке, то обе фирмы сворачивают производство (кривая 2). Особенностью данного варианта является наличия бесконечного множества положений равновесия (отрезок 3). При этом выход на конкретное положение равновесия определяется начальным состоянием системы.

Возможные варианты качественного поведения системы описаны в таблице 9.

Табл. 9. Варианты поведения системы в модели экономической конкуренции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| конкурентоспособность  (исход) | суммарный  начальный капитал | изменение капиталов фирм | |
| ***х*1** | ***х*2** |
|   вторая фирма  разоряется | мал | растет | сначала растет, потом убывает |
| велик | сначала убывает, потом растет | убывает |
| велик, *х*20 мало | убывает | убывает |
| умеренный | растет | убывает |
|   первая фирма  разоряется | мал | сначала растет, потом убывает | растет |
| велик | убывает | сначала убывает, потом растет |
| велик, *х*10 мало | убывает | убывает |
| умеренный | убывает | растет |
|   обе фирмы остаются | мал | растет | растет |
| велик | убывает | убывает |

Наличие трех и более фирм, производящих один и тот же товар, также ведет к постепенному поглощению наиболее сильной фирмы своих незадачливых конкурентов (см. приложение к предыдущей лекции). Тем самым неминуемо происходит монополизация рынка.

#### **Компьютерный эксперимент. Экономическая конкуренция.**

Обратиться к обучающему программному комплексу "*Компьютерные модели в общественных науках*", модель "*Экономическая конкуренция*". Провести следующий анализ.

1. Провести расчеты при выполнении условия ε1β1 < ε2β2 . Убедиться в том, что первая фирма разоряется при любых начальных состояниях системы.

2. Провести расчеты при выполнении условия ε1β1 > ε2 β2 . Убедиться в том, что вторая фирма разоряется при любых начальных состояниях системы.

3. Провести расчеты при выполнении равенства ε1β1 = ε2 β2 . Убедиться в том, что ни одна из фирм не разоряется.

## 3. МОДЕЛЬ "ЭКОНОМИЧЕСКАЯ НИША"

В рассмотренной выше модели для двух фирм, выпускающих один и тот же товар, невозможно долговременное совместное существование (исключая вырожденный случай выполнения равенства   
ε1β1 = ε2β2 , когда фирмы практически не различаются свойствами). Ситуация решительно изменится, если каждая фирма будет ориентироваться на собственного покупателя, отдавая предпочтение производству какого-либо специфического товара. При этом мы получаем модель, аналогичную рассмотренной ранее модели "*экологическая ниша*"

, (7.4)

где β*ij*– эффективность сбыта*i***-**ого товара*j*-ой фирмой. Для приведения полученной модели, которую естественно назвать "*экономическая ниша*" к рассмотренному в предшествующей лекции биологическому аналогу достаточно ввести параметры α*ij* = 1/β*ij* .

Для исследования системы сделаем замену переменных

τ = *a t* , *u*(τ) = *b* *x*1(*t*) , *v*(τ) = *c* *x*2(*t*) ,

где константы *a*, *b*, *c*будут подобраны так, чтобы в новых переменных уравнения (7.4) были бы как можно проще. Функции *u* и *v* и переменная τ отличаются, соответственно, от величин *х*1 , *х*2 и *t* лишь постоянными множителями. В этой связи они также характеризуют капиталы фирм и время, выраженные в другой системе координат.

После сделанных преобразований получаем соотношения

 ,

где через *u*' , *v*' обозначены производные функций *u* , *v* по переменной τ . Определив параметры

,

установим уравнения

 , (7.5)

Оценим возможные варианты поведения решения полученной задачи, считая капиталы фирм неотрицательными. В зависимости от знака величин, находящихся в правых частях соотношений (7.5), возможны следующие ситуации.

1. При выполнении условий *B* ≤ 1, *B* ≤ *C* (кроме случая *B* = *C* =1) согласно уравнениям (7.5) возможны три варианта поведения их решения (см. рис. 42 а):

а) при *u* **+** *v* **<** 1,*u* **+** *Cv* **<** *B*функции *u* и *v* возрастают;

б) при *u* **+** *v* **<** 1,*u* **+** *Cv* **>** *B*функция *u* возрастает, а *v*– убывает;

в)при *u* **+** *v* **>** 1 ,*u* **+** *Cv* **>** *B*функции *u* и *v* убывают.

Таким образом, вне зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся к значениям *u* = 1 , *v* = 0 .

2. При выполнении условий 1 ≤ *B* , *C* ≤ *B* (кроме *B = C* = 1 ) возможны три варианта поведения их решения (см. рис. 42 б):

а) при *u + v* < 1 , *u + Cv* < *B* функции *u* и *v* возрастают;

б) при *u + v* > 1 , *u + Cv* < *B* функция *v* возрастает, а *u* – убывает;

в) при *u + v* > 1 , *u* + *Cv* > *B* функции *u* и *v* убывают.

Вне зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся к значениям *u* = 0 , *v = B/C* .

3. При выполнении условий *C < B* < 1 допустимы четыре варианта: (рис. 43 в):

а) при *u + v* < 1 , *u + Cv* < *B* функции *u* и *v* возрастают;

б) при *u + v* < 1 , *u + Cv* > *B* функция *u* возрастает, а *v* – убывает;

в) при *u + v* > 1 , *u + Cv* < *B* функция *v* возрастает, а *u* – убывает;

г) при *u + v* > 1 , *u + Cv* > *B* функции *u* и *v* убывают.

В зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся либо к значениям *u* = 1 , *v* = 0 , либо к *u* = 0 ,   
*v = B/C* .

4. При выполнении условий 1 < *B < C* возможны четыре варианта: (рис. 43 г):

а) при *u + v* < 1 , *u + Cv* < *B* функции *u* и *v* возрастают;

б) при *u + v* < 1 , *u + Cv* > *B* функция *v* возрастает, а *u* – убывает;

в) при *u + v* > 1 , *u + Cv* < *B* функция *u* возрастает, а *v* – убывает;

г) при *u + v* > 1 , *u + Cv* > *B* функции *u* и *v* убывают.

Вне зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся к значениям *u* = (*C-B*)/(*C*+1) , *v* = (*B*+1)/(*C*+1) .

5. Случай *В = С* = 1 является вырожденным. При этом состояния системы со временем стремятся к некоторым значениям, лежащим на прямой *u + v* = 1 (к каким именно, зависит от начальных условий, см. рис. 43 д). С математической точки зрения вырожденный случай интересен тем, что предельные состояния системы (аттрактор) образуют не конечный набор точек на фазовой плоскости (положений равновесия), а некоторую линию – отрезок прямой *u + v* = 1 с неотрицательными значениями функций состояния.

Проанализируем полученные результаты. При

****

первая фирма превосходит вторую по обоим видам товара, поскольку произведение эффективности производства и сбыта обоих видов товара у нее выше. Вследствие этого вторая фирма неминуемо разоряется, т.е. ее капитал стремится к нулю. Противоположные неравенства

****

соответствует разорению первой фирмы. Оба этих варианты фактически возвращают нас к модели "*экономическая конкуренция*".

Соотношения

****

допускают выживание одной из фирм в зависимости от значения начального состояния системы. Эта ситуация соответствует случаю, когда первая фирма эффективнее работает со вторым видом товара, а вторая – с первым.



Рис. 42. Изменение капиталов в модели "*экономическая ниша*" (начало).



Рис. 43. Изменение капиталов в модели "*экономическая ниша*" (окончание).

Более естественным будет противоположный случай, характеризуемый неравенствами

**** .

Здесь любая из фирм выпускают оба вида товара, но предпочтение отдают своему. Вследствие этого они способны мирно сосуществовать, причем каждая фирма заполняет собственную экономическую нишу. Полученные результаты показывают, что фирма непременно должна стремиться найти своего потребителя, иначе она будет вытеснена более сильным конкурентом. И лишь мощные фирмы, гигантские предприятия могут позволить себе роскошь не бояться конкурентной борьбы, уверенно вытесняя соперников из своей сферы производства.

Вырожденный случай соответствует равенствам

****

Эта ситуация означает, что фирмы фактически обладают одинаковыми свойствами за исключением, быть может, начальных состояний. В этих условиях ни одна из них не может вытеснить другую, вследствие чего обе фирмы сосуществуют.

#### **Компьютерный эксперимент. Экономическая ниша.**

Обратиться к обучающему программному комплексу "*Компьютерные модели в общественных науках*", задача "*свой бизнес*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что первая фирма разоряется.

2. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что вторая фирма разоряется.

3. Провести расчеты при выполнении условия . Меняя начальные состояния системы, обнаружить разорение как первой, так и второй фирмы.

4. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что обе фирмы мирно сосуществуют.

## 4. МОДЕЛЬ "СВОБОДНЫЙ РЫНОК"

Обратимся теперь к экономической модели иной природы. Рассмотрим механизм изменения цен на товары и доходов населения на свободном рынке. Предполагается наличие большого числа независимых производителей товаров и продавцов, остро конкурирующих между собой. Для простоты будем считать, что объем выпускаемой продукции не меняется. Скорость изменения доходов населения считается прямо пропорциональна значению доходов *х*1 – чем больше средств имеется у людей, тем большие изменения оказываются возможными. Считается, что население имеет постоянный источник доходов, а полученные денежные средства расходуются исключительно на приобретение указанных товаров. Естественно, в отсутствии потребления товаров никакие средства не расходуются, а значит, доходы населения растут с постоянной скоростью ε1 .Доходы снижаются за счет приобретения товаров пропорционально уровню цен *х*2 с некоторым коэффициентом пропорциональности γ1 . Таким образом, скорость изменения доходов населения считается равной

*k*1 = (ε1 – γ1 *х*2) *х*1 .

Скорость изменения цен считается пропорциональной уровню цен, причем в отсутствии доходов населения товары не приобретаются, и предприниматели вынуждены снижать цены с некоторой скоростью ε2 . Рост цен осуществляется по мере возрастания доходов населения с коэффициентом пропорциональности γ2 . В результате получаем следующую формулу для определения скорости изменения цен

*k*2 = (γ2 *х*1 – ε2 ) *х*2 .

При сделанных предположениях изменение доходов населения и цен на товары будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

. (7.6)

Она в точности совпадает с уравнениями, характеризующими модель "*хищник-жертва*". Тогда решение задачи будет меняться со временем периодически (см. рис. 44).

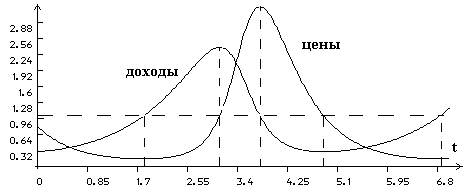


Рис. 44. Изменение доходов и цен на свободном рынке  
при значениях параметров *х*10 = 0.3 , *х*20 = 0.8 , γ1 *=* 1 , γ2 *=* 1 , ε1 *=* 1 , ε2 *=* 1 .

Предположим, что в начальный момент времени доходы населения и уровень цен сравнительно низкие, т.е. выполнены неравенства

*х*1 < ε2 / γ2, *х*2 < ε1 / γ1 .

Тогда производная от *х*1 положительна, а производная от *х*2 – отрицательна. При низких доходах населения мала и его покупательная способность, а значит, не все произведенные товары раскупаются (вспомним, что объем выпускаемой продукции в данной модели остается неизменным). В условиях острой конкуренции на свободном рынке, находясь под постоянной угрозой разорения, предприниматель вынужден снижать цены на товары. Как следствие этого на первом этапе исследуемого процесса мы наблюдаем снижение уровня цен и рост доходов населения (см. рис. 44). Рано или поздно наступает такой момент времени *t*1 , когда доходы населения станут достаточно высокими, и будет выполнено равенство *х*1(*t*1)= ε2/γ2 . При этом правая часть второго уравнения (7.6) окажется равной нулю, что соответствует экстремуму (в данном случае, минимуму) функции *х*2 . Поскольку уровень цен достаточно низок, происходит дальнейший рост доходов населения. Таким образом, выполняются соотношения

*х*1 > ε2 / γ2, *х*2 < ε1 / γ1 .

На втором этапе исследуемого процесса доходы населения оказываются достаточно высокими, а уровень цен – низким. В этих условиях согласно уравнениям (7.6) обе производные положительны, т.е. мы наблюдает рост как доходов населения (поскольку цены еще сравнительно низкие), так и цен (покупательная способность населения уже сравнительно высока). Наступает момент времени *t*2 , когда возрастающая функция *х*2 достигнет отношения ε1/γ1 . После этого оказываются справедливыми соотношения

*х*1 > ε2 / γ2, *х*2 > ε1 / γ1 ,

и мы переходим на третий этап процесса, характеризуемый снижением доходов населения (цены достаточно высоки) и ростом цен (покупательная способность населения высока). По мере снижения доходов населения наступает момент *t*3 , когда будет выполняться равенство *х*1(*t*3)= ε2/γ2 . После этого в условиях

*х*1 < ε2 / γ2, *х*2 > ε1 / γ1 .

наблюдается дальнейшее снижения доходов населения (цены еще достаточно высоки) и падения цен за счет снижения покупательной способности населения. Этот процесс продолжается вплоть до момента времени *t*4 , когда цены упадут до величины ε1/γ1 , после чего мы возвращаемся на первый этап, характеризуемый ростом доходов населения за счет снижения цен и дальнейшего уменьшения уровня цен в виду низкой покупательной способности населения. Начинается новый цикл рассматриваемого процесса.

Полученные результаты подтверждают, что экономические законы имеют столь же объективный характер, как и физические, химические и т.д. Предприниматель на свободном рынке не может не снижать цены при падении покупательной способности населения, поскольку в противном случае его опередят конкуренты и легко распродадут все свои товары. В условиях острой конкуренции необходимо как можно быстрее сбыть товары, пусть даже и по сниженным ценам, чем упрямо ждать окончательно свихнувшегося покупателя, который зачем-то приобретет товары по высокой цене, если рядом аналогичные вещи можно купить хоть немного дешевле. С другой стороны, при высоких доходах население быстро скупает все имеющиеся в продаже товары, а поддержать изменившийся баланс между спросом и предложением в условиях неизменности объема производства, заложенного в данную модель, можно исключительно за счет повышения цен. Да и как тут не поднять цены, если народ прямо-таки сметает товары с прилавка...

#### **Компьютерный эксперимент. Свободный рынок.**

Обратиться к модели "*Свободный рынок*". Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически. Меняя начальное состояние системы, обнаружить положение равновесия, соответствующее случаю совпадения спроса и предложения.

## 5. МОДЕЛЬ "МОНОПОЛИЗИРОВАННЫЙ РЫНОК"

Предшествующая модель характерна для свободного рынка, когда имеется сравнительно много независимых друг от друга товаропроизводителей и между ними происходит острая конкурентная борьба. Только угроза конкуренции может заставить производителей товаров и торгующие организации пойти на столь отчаянный шаг, как снижение цен на товары и услуги в случае превышения предложения над спросом. Тот из предпринимателей, кто раньше почувствует изменение рыночной конъюнктуры и успеет вовремя снизить цены и быстро сбыть свой товар, сумеет получить значительную прибыль. Если же какой-то упрямец не захотел или не успел осуществить своевременное снижение цен, то он в принципе не сможет реализовать свою продукцию и неизбежно разорится на радость более расторопным конкурентам.

В условиях сильно монополизированного производства и   
сбыта продукции у предпринимателей имеется возможность в той же ситуации избежать нежелательного снижения цен без угрозы полного разорения. Монополист не боится конкуренции и может восстановить нарушенный баланс между спросом и предложением не за счет снижения цен и увеличения тем самым спроса на товар, а с помощью сокращения производства, т.е. уменьшения предложения. Предприниматель-монополист может снизить объем производства, считая для себя более выгодным продать меньше товара, но по более высокой цене. Он уверен, что у населения, испытывающего определенную потребность в данном товаре, просто не будет другого выхода, кроме как приобрести его по достаточно высокой фиксированной цене, хотя бы и в меньшем количестве.

В рамках данной модели цена на товар остается неизменной и уже не будет функцией состояния системы. В то же время наряду с доходами населения *х*1 будет меняться теперь уже объем выпускаемой продукции *х*3 . В отсутствии потребления товаров предприниматель снижает не цены, а объем производства с некоторой скоростью ε3 . Возрастание объема производства происходит по мере повышения доходов населения (с коэффициентом пропорциональности γ3), т.е. его покупательной способности. В отсутствии потребления товаров, т.е. при *х*3 = 0 доходы населения растут со скоростью ε1 . При потреблении товаров возрастают расходы прямо пропорционально (с коэффициентом γ1) количеству имеющихся в продаже товаров, т.е. объему производства. На основании этих рассуждений приходим к следующей модели

. (7.7)

Мы вновь получаем модель типа "*хищник-жертва*" с хорошо известным периодическим решением. Вид этого решения характеризуется рис. 44 с заменой индекса "2" на "3" и новой интерпретацией результатов. При низких начальных значениях доходов и объема выпускаемой продукции согласно уравнениям (7.7) наблюдается сокращение производства. Не имея достаточных средств, люди вынуждены снижать потребление товаров, вследствие чего уменьшаются их расходы, что можно понимать как увеличение доходов (хотя этот восхитительный факт едва ли кого-либо обрадует).

Со временем на рынке останется слишком малое количество товаров, не достаточное для поддержания даже сниженного спроса, а у людей постепенно накапливается некоторое количество денег, которое они могли бы истратить на приобретение товаров. В этих условиях предприниматель увеличивает выпуск товаров. Однако до тех пор, пока товаров имеется еще сравнительно малое количество, потребность населения остается не удовлетворенной, и люди продолжают накапливать средства. По мере выпуска все большего количества товаров спрос начинает удовлетворяться и, в конце концов, становится меньше предложения. Расходы населения на приобретение товаров возрастают, а покупательная способность естественно снижается. Наступает время, когда значительное количество товаров вновь остается не распроданным.

Спасти предпринимателя от неминуемого разорения может снижение либо цен, либо производства, т.е. восстановление баланса между спросом и предложением. На монополистическом рынке предприниматель может, не боясь конкуренции, оставлять цены неизменными. Таким образом, сокращение производства неминуемо. Выпуск товаров будет возобновлен лишь тогда, когда население сумеет накопить достаточное количество средств. Таким образом, предприниматель выпускает товар некоторыми не очень большими партиями, и этот процесс периодически повторяется.

#### **Компьютерный эксперимент. Монополизированный рынок.**

Обратит*ь*ся к задаче "*Монополизм*". Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически. Меняя коэффициенты уравнения, обнаружить положение равновесия системы, обеспечивающее баланс между спросом и предложением.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы рассмотрели процессы, происходящие на свободном и монополизированном рынке. В условиях жесткого государственного регулирования экономики нарушение баланса между спросом и предложением восстанавливается принципиально иными средствами. При ухудшении уровня жизни населения и падении его покупательной способности происходит не снижения цен или сокращение производства, а повышение должностных окладов. Это, в свою очередь, приводит к росту цен, что соответствует модели "*инфляция*".

Взаимовыгодное сотрудничество фирм описывается моделью типа "*симбиоз*". Если две дружественные фирмы, выпускающие составные части одной и той же продукции, изначально обладают малыми средствами, то они неизбежно разоряются. Достаточно большие стартовые капиталы фирм обеспечивают им полное процветание. При постепенном насыщении рынка товарами происходит либо разорению фирм, либо стабилизация рассматриваемой системы. Взаимодействие предпринимателя и рэкетира описывается уравнениями типа "*хищник - жертва*" с периодическим изменением доходов обоих действующих лиц. Модель "*экономическая ниша*" аналогична описанной в предшествующей лекции биологической модели "*экологическая ниша*", в которой рассматриваются два вида, потребляющих, вообще говоря, одну и ту же пищу, но отдающих предпочтение своей. В этих условиях имеется возможность мирного сосуществования видов.

### **1. Модель инфляции.**

Еще один вариант рыночных отношений связан с жестким государственным регулированием экономики. Государство является товаропроизводителем и продавцом, а также работодателем населения, определяя его доходы. Пусть в силу каких-либо причин доходы населения оказываются слишком низкими, а цены – непомерно высокими, что приводит к нарушению баланса между спросом и предложением. Когда подобная ситуация наблюдается в условиях свободного рынка, восстановление баланса происходит за счет снижения цен, а следовательно, стимуляции повышенного спроса. В случае монополизированного рынка можно снизить объем производства, приблизив тем самым уровень предложения к снизившемуся уровню спроса. В нашем случае реализуется третий сценарий развития событий.

Может ли государство снизить цены на товары? На такое героическое действие вынужден идти предприниматель на свободном рынке, предпочитающий сбыть как можно больше продукции (хотя бы и по сниженной цене) и тем самым обогатиться за счет менее расторопных конкурентов. Государство не имеет конкурентов и по такому пути не пойдет. К тому же снижение цен неминуемо превратит пока еще действующие предприятия в убыточные. Государство не очень заинтересовано и в сокращении объема производства. Это частник-монополист может пойти на временную консервацию своего предприятия, провести сокращение штатов, уменьшив тем самым статьи расходов, и направить вырученные средства в более прибыльные сферы деятельности. Государственному учреждению провести в жизнь столь непопулярные решения быстро и жестко значительно труднее. К тому же директор подобного предприятия получает твердый должностной оклад, а не прибыль с производства, что никак не стимулирует оперативные действия с его стороны.

Однако в руках государства еще остаются мощные рычаги, заведомо отсутствующие у частного предпринимателя. Государство определяет и контролирует всю финансовую политику. С целью увеличения покупательной способности населения и снижения социальной напряженности (государственные чиновники ох как не любят потрясений, грозящих потерей теплых насиженных мест) оно может пойти на повышение окладов трудящимся, а также пенсий, пособий, стипендий и т.д. Откуда же у нашего доброго государства найдутся явно не малые средства для увеличения доходов населения? Может ли оно силой каких-либо гениальных законов или мудрых указов повысить благосостояние своих многострадальных граждан? Конечно же, нет! Но ведь речь-то идет всего лишь об увеличении числа денежных знаков, находящихся в обращении. Выполнение сего славного мероприятия вполне по силам даже и не очень развитому государству, находящемуся в условиях жесточайшего экономического кризиса.

В данной модели изменение цены на товар *х*2 по-прежнему характеризуются доходами населения (точнее, имеющимся у него объемом денежной массы), а доходы населения *х*1 определяются постоянно индексируемой заработной платой, начисляемой государством исходя из имеющегося уровня цен. Естественно, чем выше цены на товары, тем чаще вынуждено бедное государство повышать заработную плату своим служащим. Таким образом, изменение доходов населения будет пропорционально цене на товар. В результате мы приходим к системе уравнений



где положительные константы α и β являются параметрами процесса. Решения этих уравнений имеют вид

*x*1(*t*) = *a*1 exp(-λ*t*) + *b*1 exp(λ*t*) , *х*2(*t*) = *a*2 exp(-λ*t*) + *b*2 exp(λ*t*) ,

где  , а значения констант *a*1 , *b*1 , *a*2 , *b*2находятся из начальных условий. Согласно полученным результатам мы наблюдаем экспоненциальный рост цен и доходов населения.

Столкнувшись с низким спросом на товары, государство повышает оплату труда своим служащим, благо станок, печатающий денежные знаки, находится в надежных руках. По мере возрастания имеющейся у населения денежной массы увеличивается его покупательная способность, что приводит к повышению спроса на товары. При неизменном объеме производства и возрастающем спросе товар неминуемо окажется в дефиците. Ликвидировать его, в принципе, можно было бы за счет увеличения объема производства, что не столь уж процветающему государству оказывается явно не под силу. Можно было бы снизить уровень заработной платы, но это уже грозит серьезными социальными потрясениями. Таким образом, единственный надежный путь выхода из сложившейся пикантной ситуации связан с повышением цен, что неминуемо ведет к снижению спроса при неизменном предложении. Однако рост цен непременно приводит к обнищанию народных масс и снижению уровня потребления. Для восстановления баланса между спросом и предложением во избежание социально-политического кризиса государство вновь повышает заработную плату, что непременно вызовет очередной виток цен и т.д. Наблюдаемый процесс называется *инфляцией*.

### **2. Модели экономического сотрудничества.**

Сосуществование фирм не обязательно идет по пути конкурентной борьбы. Возможна и противоположная ситуация, когда фирмы вступают на путь взаимовыгодного сотрудничества. Предположим, что две фирмы выпускают комплектующие изделия так, что продукция одной из фирм не может быть реализована без соответствующей продукции другой фирмы (грубо говоря, одна фирма производит болты, а вторая – гайки к этим болтам). В этих условиях фирмы просто не могут существовать друг без друга. В то же время успех одной из них благоприятно сказывается на финансовом положении другой фирмы. В результате приходим к уравнениям



где *хi* –капитал *i*-ой фирмы, ε*i* – ее скорость разорения в отсутствии другой фирмы, γ*i* – показатель влияния *j*-ой фирмы на *i*-ую, *i* = 1,2 , *j≠ i* . Полученные соотношения с точностью до обозначений совпадают с биологической моделью "*симбиоз*". Зная свойства последней, можно заключить, что при малых начальных капиталах обе фирмы разоряются. Достаточно большие стартовые капиталы фирм приводят к полному процветанию, которое выражается в неограниченном возрастании их капиталов.

Последний результат, конечно же, на практике не реализуется. Для уточнения модели можно учесть ограниченность потребления выпускаемой продукции, т.е. постепенно насыщение рынка по мере расширения производства. Предположим, что снижение роста капитала фирмы за счет насыщения рынка зависит квадратичным образом от значения ее капитала. В результате получаются уравнения

,

где коэффициенты β1 и β2 характеризуют насыщение рынка товарами соответствующих фирм. Эти соотношения в точности совпадают с уравнениями модели "*симбиоз с ограниченной пищей*". В зависимости от сочетания параметров здесь возможно стабилизация или разорение обеих фирм. Сравнительный анализ экономической и биологической модели типа "*симбиоз*" приводится в таблице 10.

#### **Компьютерный эксперимент. Экономическое сотрудничество.**

Обратиться к задаче "*Компаньоны*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты для малых начальных состояний системы. Убедиться в том, что обе фирмы разоряются.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы. Убедиться в том, что капиталы обоих фирм неограниченно возрастают.

3. Меняя начальные состояния системы, обнаружить режимы немонотонного характера убывания и возрастания капиталов фирм.

Табл. 10. Аналогия между моделями типа "*симбиоз*".

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | характе- р ристика | биологическая модель | экономическая модель |
| 1 | *х*i | численность видов | доходы фирм |
| 2 | εi | скорость вымирания вида в отсутствии другого вида | скорость разорения фирмы в отсутствии другой фирмы |
| 3 | γi | прирост численности вида  при наличии  дружественного вида | прирост капитала  фирмы при наличии  дружественной фирмы |
| 4 | βi | снижение прироста  численности вида из-за  ограниченности пищи | снижение прироста  доходов фирмы  из-за насыщения рынка |

#### **Компьютерный эксперимент. Сотрудничество с ограниченным спросом.**

Обратиться к задаче "*Озабоченные компаньоны*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты для малых начальных состояний системы. Убедиться в том, что обе фирмы разоряются.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы.   
Подобрать параметры системы таким образом, чтобы капиталы обоих фирм со временем стабилизировались.

### **3. Модель "Рэкетир - предприниматель"**

Рассматривается еще один специфический тип экономического   
"сотрудничества" – взаимоотношение между предпринимателем и рэкетиром. Функциями состояния здесь являются их доходы соответственно *х*1 и *х*2 . Предполагается, что предприниматель имеет свою фирму с постоянным источником доходов, и в отсутствии рэкетира его доходы растут со скоростью ε1 . Рэкетир живет исключительно за счет предпринимателя, и в отсутствии последнего расходует имеющиеся у него средства со скоростью ε2 . Повышение доходов предпринимателя приводит к пропорциональному обогащению рэкетира, которое, в свою очередь, осуществляется за счет изъятия средств у предпринимателя. Исследуемый процесс описывается системой уравнений

,

где параметры γi характеризуют влияния действующих лиц друг на друга.

Табл. 11. Аналогия между моделями типа "*хищник-жертва*".

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | характе- ристика | биологическая модель | экономическая модель |
| 1 | *х*1 | численность жертв | доход предпринимателя |
| 2 | *х*2 | численность хищников | доход рэкетира |
| 3 | ε1 | прирост жертв  в отсутствии хищников | естественная прибыль  предпринимателя |
| 4 | ε2 | вымирание хищников  в отсутствии пищи | естественные расходы рэкетира |
| 5 | γ1 | истребление жертв  хищниками | падение доходов предпринимателя  за счет действия рэкетира |
| 6 | γ2 | рост численности  хищников  при наличии пищи | рост доходов рэкетира за счет  ограбления предпринимателя |

Эти соотношения в точности соответствуют биологической модели "*хищник-жертва*". Аналогия между биологическим и экономическим объектами представлена в табл. 11. Естественно, решение задачи оказываются периодическими функциями. С возрастанием доходов предпринимателя рэкетир имеет возможность собирать всё большую дань. Однако по мере роста "аппетитов" рэкетира предприниматель начинает разоряться, что со временем сказывается и на доходах рэкетира. Поскольку полное разорение предпринимателя губительно для рэкетира, он вынужден сокращать изымаемую денежную сумму. В результате со временем предприниматель восстанавливает финансовое положение своей фирмы, пошатнувшееся из-за непомерных поборов. И тогда рэкетир получает возможность наверстать упущенное. Начинается новый цикл процесса.

#### **Компьютерный эксперимент. Рэкет.**

Обратиться к задаче "*Рэкет*". Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически. Меняя коэффициенты уравнения, обнаружить положение равновесия при данных начальных состояниях системы.

### **4. Модель "Экологическая ниша".**

В предшествующей лекции рассматривалась модель "*экологическая ниша*", описываемая уравнениями

,

где *xi* – численность *i*-ого вида, α*ij* – потребление *i*-ым видом *j*-ой пищи,ε*i* – естественный прирост *i*-ого вида, *i*,*j* = 1,2. Определив β*ij* = 1/α*ij*, получаем рассмотренную выше модель "*экономическая ниша*".

Свойства рассматриваемой модели с точностью до смысла входящих в нее характеристик описывается рисунком 39. Повторяя предшествующие рассуждения, приходим к следующим вариантам развития событий. Первый случай, когда при любых начальных состояниях вымирает второй вид, соответствует неравенствам

****

При этом у первого вида отношения прироста численности к потреблению обоих типов пищи превосходит аналогичные отношения второго вида. Тем самым первый вид во всех отношениях оказывается более жизнестойким, и вымирание второго вида неизбежно. Аналогично противоположные неравенства неминуемо влекут вымирание первого вида. Фактически в этих двух вариантах наличие двух различных типов пищи не проявляется, и мы, по существу, возвращаемся к биологической модели "*конкурентной борьбы*".

Соотношения

**** .

допускают выживание лишь одного вида. Начальное состояние системы определяет, какой конкретно вид вымирает. Эта ситуация не очень согласуется с постановкой задачи, поскольку соответствует случаю, когда первый вид охотнее потребляет излюбленную пищу второго вида и наоборот. Более правдоподобной является противоположная ситуация, характеризуемая неравенствами

****.

Здесь оба вида в принципе способны потреблять любую пищу, но предпочтение оказывают своей. Вследствие этого они способны мирно сосуществовать. Тем самым каждый вид заполняет свою экологическую нишу, что хорошо согласуется с реальной ситуацией и дает название рассматриваемой модели.

# Лекция № 8 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПОЛИТОЛОГИИ

*Высшее назначение математики состоит в том*, *чтобы находить скрытый порядок в хаосе*, *который нас окружает.*

Норберт ВИНЕР

В данной лекции рассматриваются некоторые динамические модели политической борьбы. Исследуемые системы можно интерпретировать как различные стадии перехода от тоталитаризма к демократии. На начальной стадии процесса предполагается, что после крушения тоталитарной системы при отсутствии демократических традиций в стране принимается конституция, допускающая многопартийность. В этих условиях образуются некоторые   
политические объединения, не имеющие четкой социально-политической платформы и группирующиеся, как правило, вокруг энергичных и честолюбивых лидеров, имеющих острое желание прийти к власти или удержать ее. Они конкурируют между собой за голоса избирателей, что соответствует модели политической конкуренции, описываемой хорошо известными уравнениями конкурентной борьбы. В этих условиях неизбежно побеждает сильнейший из конкурентов. Со временем в стране устанавливается полное господство одной партии. Другие партии имеют законное право на существование, но не имеют возможности прийти к власти.

Переход от формальной к реальной многопартийности возможен лишь в том случае, когда какое-либо политическое объединение (естественно, не партия власти) начинает ориентироваться на конкретный социально-политический слой населения. Если на первой стадии процесса демократизации все граждане в равной степени служат объектами конкурентной борьбы, то теперь ситуация меняется. Общество раскалывается на социальные группы, а различные партии начинают выражать интересы не столько народа в целом, сколько отдельных социальных слоев. В результате мы приходим к модели политической ниши, описываемой рассмотренными ранее уравнениями ниши. При достаточно высокой степени специализации конкурирующих субъектов решение этих уравнений со временем выходит на нетривиальный стационар. Этот результат можно интерпретировать как фактическую многопартийность – в парламенте и местных органах власти наряду с лидирующей партией уже может быть представлена и оппозиция.

Характерной чертой второй стадии перехода от тоталитаризма к демократии является существование реальной оппозиции, причем у партии власти нет возможности подавить своих противников, а у оппозиции – прийти к власти. Со временем, однако, оппозиция может расширить свою политическую нишу и, в конце концов, прийти к власти. После этого она не имеет возможности трансформироваться в новую партию власти и апеллировать ко всему народу сразу, будучи связанной определенными обязательствами перед теми социальными группами населения, которые привели ее к власти. В этих же условиях бывшая партия власти также уже не может оставаться партией всего народа, поскольку ей невозможно добиться поддержки тех слоев населения, на которые опирается новая власть. Таким образом, мы получаем две партии с четко выраженными политическими платформами, которые способны сменять друг друга у власти. В результате получается третья модель политической борьбы, которая имеет периодическое решение.

## 1. ПОЛИТИЧЕСКАЯ КОНКУРЕНЦИЯ

Предположим, что в некоторой гипотетической стране впервые была принята демократическая конституция, допускающая многопартийность. В результате появляются политические группировки, претендующие на власть и конкурирующие между собой. В виду отсутствия в стране устоявшихся демократических традиций эти группировки еще не имеют более или менее четко социально-политической программы. В отсутствии явной опоры в лице конкретных социальных слоев населения они стремятся заручиться поддержкой всего народа сразу и выходят на выборы под общенародными лозунгами.

Для простоты ограничимся рассмотрением политической борьбы двух партий за влияние среди избирателей. Состояние системы будем описывать функциями влияния *x*1 и *x*2 , которые представляют собой число избирателей, предполагающих отдать свои голоса за данную партию. Каждая из партий ведет активную борьбу за расширение своего влияния и в отсутствии ограничений на число избирателей имела бы постоянный положительный прирост влияния. Однако в виду явной ограниченности числа потенциальных избирателей рост их влияния рано или поздно сокращается или даже становится отрицательным. Естественно, чем большее число избирателей уже сделало свой выбор на данный момент времени, тем меньше осталось потенциальных   
избирателей, которые еще могут отдать предпочтение какой-либо из партий. Таким образом, прирост влияния *i*-ой партии определяется по формуле

**** *i =* 1,2 ,

где ε*i* – естественный прирост влияния партий, определяемый ее политической активностью, а β*i* – параметр процесса, характеризующий снижение прироста влияния партии за счет того, что в данный момент времени избиратели в количестве *x*1 + *x*2 человек уже отдали свое предпочтение одной из партий. Коэффициент β*i* связан с политической программой партии (чем привлекательнее партия в глазах избирателя, тем в меньшей степени ей угрожает снижение влияния). В результате получаем уравнения

****, *i* = 1,2.(8.1)

Эти соотношения определяют модель "*политическая конкуренция*", которая с точностью до обозначений совпадает с рассмотренными в предшествующих лекциях моделями конкурентной борьбы.

Согласно проведенному ранее исследованию определяющую роль для поведения решения системы играет произведение ε*i* β*i* , характеризующее силу партии. Та партия, которая обладает более сильной политической программой и активнее влияет на избирателей (т.е. имеет идеологическое, экономическое и психологическое преимущество в борьбе с политическими противниками), постепенно вытесняет своих конкурентов с политической сцены. Как мы уже знаем, наличие трех и более конкурирующих сторон приводит к аналогичным результатам. Таким образом, в том случае, когда партии выступают с общегосударственной программой (национального, религиозного или классового характера), мы наблюдаем неизбежную монополизацию власти.

Полученные результаты говорят о том, что в стране устанавливается авторитарный режим. Его принципиальное отличие от предшествующего тоталитарного режима состоит в наличии сравнительно демократической конституции. Оппозиция имеет формальное юридическое право на существование, но не имеет реальной возможности воспользоваться этим правом и закрепиться в органах власти. Она непременно вытесняется со временем с политической арены. Оппозиционные партии существуют, но не оказывают никакого влияния на политическую жизнь страны. Их формальное существование крайне выгодно партии власти, которая имеет возможность заявлять о своей явной приверженности демократической форме правления, демонстрируя свою высокую цивилизованность перед мировым сообществом и получая за это определенные кредиты.

#### **Компьютерный эксперимент. Политическая конкуренция.**

Обратиться к обучающему программному комплексу "*Компьютерные модели в общественных науках*", модель "*Политическая конкуренция*".   
Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты при выполнении условия ε1β1 < ε2β2 . Убедиться в том, что власть в стране захватывает вторая партия.

2. Пров*е*сти расчеты при выполнении условия ε1β1 > ε2β2 . Убедиться в том, что власть в стране захватывает первая партия.

## 2. МОДЕЛЬ "ПОЛИТИЧЕСКАЯ НИША"

В рассмотренной выше модели политической конкуренции происходит постепенное вытеснение более слабой партии с политической арены. В этих условиях в государстве наблюдается тенденция к переходу на однопартийную систему, что фактически ведет к монополизации всей политической системы. Препятствием подобной монополизации может быть создание партий, изначально ориентированных не на произвольного абстрактного избирателя, а на конкретные слои населения с более или менее четкими групповыми интересами.

Мы рассмотрим политическую борьбу двух партий, имеющих достаточно широкую политическую платформу, но стремящихся выражать интересы некоторых определенных слоев населения. Динамика политической борьбы в этом случае описывается уравнениями

, (8.2)

где коэффициент β*ij* характеризует эффективность политической программы *i*-ой партии в расчете на *j*-ую группу населения. Полученные соотношения фактически совпадают с рассмотренными ранее моделями типа "*экономическая ниша*". В предшествующей лекции было показано, что при выполнении неравенств

**** .

т.е. в условиях, когда каждая партия более эффективно работает со своей группой избирателей, обе партии имеют шанс выжить и быть представленными в парламенте и местных органах власти. В принципе, выполнения указанных соотношений может добиться и одна партия, достаточно эффективно взаимодействующая с конкретным социальным слоем населения. Речь, понятно, идет не о могущественной партии власти, а о существенно более слабой оппозиции, которая может закрепиться на политической арене только при наличии у нее достаточно четкой политической ориентации.

Полученные результаты говорят о бесперспективности существования партий с размытой социальной программой. Среди подобных партий фактически выживает только одна – партия власти. Вспомним также, что в самом термине "партия" заключен смысл "части", а не "целого". Если в первой модели партия власти наверняка вытесняет с политической арены всех своих конкурентов, то в модели "*политической ниши*" власть вынуждена терпеть оппозицию, которая приобретает некоторое число мест в парламенте и способна в определенной степени влиять политическую жизнь в стране. Однако парламентское большинство по-прежнему находится в руках у партии власти, которая сохраняет в своих руках реальные рычаги управления государством.

#### **Компьютерный эксперимент. Политическая ниша.**

Обратиться к задаче "*Политическая ниша*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что побеждает вторая партия для любых начальных состояний системы.

2. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что побеждает первая партия для любых начальных состояний системы.

3. Провести расчеты при выполнении условия  Меняя начальные состояния системы, обнаружить победу как первой, так и второй партии.

4. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что обе партии сохраняют определенное влияние для любых начальных состояний системы.

## 3. ДВУХПАРТИЙНАЯ СИСТЕМА

Переход к третьему этапу политического процесса демократизации обусловлен постепенным расширением политической ниши у оппозиции. Дело в том, что оппозиция не несет никакой ответственности за социально-политическую и экономическую жизнь в стране, ограничиваясь острой критикой партии власти. Последняя же вынуждена действовать активно, а значит, неминуемо совершает время от времени всевозможные ошибки, задевает чьи-то интересы, вызывает определенное недовольство у сограждан. Со временем всё большее число обиженных избирателей отдает свои голоса оппозиции, которая не скупится на обещания. Рано или поздно политическая ниша оппозиции расширяется до размеров парламентского большинства, и в стране происходит смена власти.

Победившая оппозиция, будучи связанной данными ранее обещаниями и широко разрекламированной предвыборной программной, практически не имеет возможности выступать от имени всего народа. Она должна хоть к какой-то степени отстаивать прямые интересы тех слоев населения, которые привели ее к власти. С другой стороны, и проигравшая партия власти уже не в силах оставаться общенародной партией. За ней ни в коем случае не пойдут те слои населения, которые остро заинтересованы в проведении глубоких реформ нового правительства. С другой стороны, все недовольные этими реформами могут объединиться вокруг новой оппозиции при условии существенного изменения ею своей политической и экономической программы. В результате мы получим две партии с достаточно четкой социально-политической платформой, более или менее последовательно выражающие прямые интересы конкретных социальных слоев населения.

Отметим, что в большинстве стран с устоявшимися демократическими традициями политическая жизнь в значительной степени определяется деятельностью двух партий (или партийных блоков), одну из которых почему-то принято называть левой, а вторую – правой. Одна из них обычно придерживается социал-демократических традиций и отдает предпочтение принципу равенства, а другая – либерального толка и исповедует принцип свободы. Поскольку наиболее давними традициями двухпартийной системы обладает старая добрая Англия, для определенности назовем первую (левую) партию лейбористской, а вторую (правую) – консервативной.

Целью лейбористской партии является снижение социального неравенства между различными слоями населения. Она защищает, в первую очередь, интересы наиболее нуждающихся малоимущих граждан, справедливо полагая, что более состоятельные граждане сами способны за себя постоять. В этой связи лейбористская партия борется за повышение пенсий и пособий, за снижение уровня безработицы, за увеличение льгот наименее защищенным в социальном плане гражданам.

Однако возникает вопрос, где же можно изыскать средства для претворения в жизнь столь благородной социальной программы лейбористов? Желаемая цель может быть достигнута за счет проведения в жизнь достаточно жесткой налоговой политики и повышения влияния государства в управлении экономикой. Увеличивая налоги, лейбористское правительство приобретает дополнительные средства у более   
состоятельных слоев населения и направляет вырученные деньги на социальные нужды, сглаживая тем самым противоречия между бедными и богатыми. Проводя национализацию промышленности, лейбористы создают новые рабочие места и оберегают малорентабельные предприятия от неминуемого финансового краха, грозящего потерей работы многим ни в чем не повинным трудящимся.

В свою очередь, консерваторы выступают за свободу частного предпринимательства. Они убеждены, что повышение жизненного уровня населения является прямым следствием высокой эффективности производства. В этой связи консерваторы считают необходимым защищать интересы сравнительно малочисленной, но существенно более активной группы граждан – тех, чья успешная профессиональная деятельность и определяет высокий уровень благосостояния страны. С этой целью консервативное правительство стремится увеличить приток капитала в страну, как отечественного, так и иностранного. Оно проводит либерализацию налоговой политики, закрывает убыточные государственные предприятия, сокращает различного рода   
государственные расходы. Консерваторы стремятся снизить роль государства в управлении экономикой и проводят денационализацию предприятий, прекрасно понимая, что частное предпринимательство в условиях свободного рынка позволяет более эффективно управлять производством по сравнению с неповоротливым государственным   
регулированием.

Наша задача состоит в математическом моделировании процесса сосуществования двух партий со столь разными политическими платформами. В качестве функций состояния выбираем популярность лейбористов и консерваторов, которые будем обозначать через *х*1 и *х*2 соответственно. Популярность партии в тот или иной момент времени регистрируется с помощью опросов общественного мнения. Эти результаты закрепляются на парламентских выборах (а в ряде стран – еще и на президентских и муниципальных выборах). Победившая партия получает возможность сформировать собственное правительство и попытаться претворить в жизнь свою политическую и экономическую программу. Если партия оправдывает доверие своих избирателей, то она сможет продержаться до следующих выборов и остаться у власти на новый срок. При неудачной политике правительства к власти   
приходит оппозиция (возможно, даже на досрочных парламентских выборах).

Вся деятельность лейбористского правительства направлена на достижение святой цели улучшения уровня жизни всего населения, повышения доходов широких народных масс. Консерваторы же стремятся повысить эффективность производства, добиться оздоровления экономики страны. В этой связи в число функций состояния мы включаем также средние доходы населения *у*1 и эффективность производства *у*2 . Таким образом, нам необходимо установить, каким образом будут меняться со временем популярность лейбористов и консерваторов, а также доходы населения и эффективность производства.

Скорость изменения влияния любой из партий по-прежнему будем считать пропорциональной значению этого влияния. При этом рост влияния лейбористов возможен при сравнительно низком уровне жизни населения, когда всё большее число граждан будет нуждаться в социальной защите. В то же время этот рост произойдет лишь при достаточно высокой эффективности производства, а иначе значительное количество избирателей отдадут предпочтение консерваторам. При тех же самых условиях происходит снижение влияния консерваторов. В результате получаются уравнения

 (8.3)

где α1 , α2 – параметры процесса.

С усилением влияния лейбористов и падением влияния консерваторов наблюдается рост доходов широких слоев населения, поскольку с приходом к власти лейбористы начинают бороться с безработицей, повышать пенсии, социальные льготы мало имущим и т.д. В то же самое время, как это не печально, происходит падение эффективности производства. Дело в том, что по мере создания новых рабочих мест, повышения отчислений на социальные нужды и прочих благородных деяний неизбежно снижаются доходы на предприятиях, а увеличение налогов неминуемо приводит к неуклонно возрастающему желанию у несознательных предпринимателей уклониться от их уплаты и к оттоку капитала за границу. Напротив, с приходом к власти консерваторов (т.е. в условиях роста их влияния и снижения популярности лейбористов) начинается отчаянная борьба за оздоровление экономики страны, но при неизбежном сокращении ассигнований на социальные нужды и росте безработицы. В результате получаем уравнения

 (8.4)

где β1 , β2 – параметры процесса.

Проведем математический анализ полученной задачи. Из уравнений (8.3), (8.4) следуют соотношения



Таким образом, справедливы равенства

*х*1(*t*) *х*2(*t*) = *c*1 , *y*1(*t*) *y*2(*t*) = *c*2 , (8.5)

где *c*1 , *c*2 – константы, определяемые начальными состояниями системы.

Выражая из условий (8.5) функции *х*2 и *у*2 , приводим систему (8.3), (8.4) к следующему виду

 . (8.6)

После замены переменных

τ = *a t* , *u*(τ) = *b* *x*1(*t*) , *v*(τ) = *c у*1(*t*)

эти соотношения принимают вид



Вводя обозначения



приходим к уравнениям

 (8.7)

Установим поведение решение полученной системы. Пусть, к примеру, в начальный момент времени справедливы неравенства

0 < *u*(*t*) < 1 , 0 < *v*(*t*) < 1 . (8.8)

Тогда согласно соотношениям (8.7) функция *u* возрастает, а *v* – убывает. По мере приближения функции *v* к нулю из первого уравнения следует, что производная *u*' стремится к бесконечности. Таким образом, в некоторый момент времени, функция *u* превзойдет значение единицы, и будут выполнены соотношения

*u*(*t*) > 1 , 0 < *v*(*t*) < 1 .

В результате наступает возрастание обоих функций, которое продолжается до тех пор, пока вторая из них не станет больше единицы. При выполнении неравенств

*u*(*t*) > 1 , *v*(*t*) > 1

наблюдается убывание функции *u* и возрастание *v* вплоть до момента времени, когда будет выполнено равенство *u* = 1 . При

0 < *u*(*t*) < 1 , *v*(*t*) > 1

обе функции убывают. Если функция *u* приближается к нулю, то согласно второму уравнению (8.7) производная *v*' неограниченно убывает, а значит, со временем функция *v* достигнет значения единицы. Далее процесс возобновляется. Можно убедиться, что решения системы оказываются периодическими функциями.

Проанализируем полученные результаты с точки зрения политологии. Предположим, что в начальный момент времени преобладает влияние консерваторов, доходы населения сравнительно низкие, а эффективность производства достаточно высока, что соответствует справедливости соотношений (8.8). В этих условиях происходит бурный рост популярности лейбористов (их потенциальные избиратели достаточно активны в виду низких доходов широких народных масс) и падение влияния консерваторов (более зажиточные слои населения, ориентирующиеся традиционно на консерваторов, при высокой эффективности производства остаются весьма пассивными). Если в это время происходят парламентские выборы, то на смену окончательно дискредитировавшего себя правительства консерваторов к власти придут добрые лейбористы к великой радости широких народных масс.

С целью повышения доходов населения, честно реализуя свою предвыборную программу, бравые лейбористы увеличивают размеры пенсий, пособий, социальные льготы малоимущим. Это достигается за счет увеличения налогов (а откуда еще?), которые платят главным образом более состоятельные слои населения. Лейбористы создают новые рабочие места, успешно проводя борьбу с безработицей. Для этого они осуществляют национализацию предприятий, поскольку именно в государственных учреждениях в условиях правления лейбористов можно добиться сравнительно высокого уровня занятости и относительно высоких окладов для многочисленных мало квалифицированных работников. Следствием проводимой политики правительства являются постепенное возрастание доходов широких народных масс и явное снижение социальной напряженности.

Однако славный политический курс сердобольных лейбористов имеет, к сожалению, и отрицательные последствия. Жесткая налоговая политика правительства приводит к тому, что значительная масса предпринимателей становится не заинтересованной в развитии отечественной промышленности и предпочитают вывозить свой капитал за границу, где налоговое бремя не столь уж сурово. Государственные предприятия, на которых трудятся слишком большое количество не очень квалифицированных и сравнительно неплохо оплачиваемых рабочих и служащих, становятся убыточными и функционируют главным образом за счет дотаций государства. Средства на подобные дотации и на реализацию широкой социальной программы поступают в государственную казну за счет все возрастающих налогов. Однако в условиях вывоза значительной части капитала за границу и массового уклонения от уплаты налогов государство получает всё меньше денежных средств от своих несознательных сограждан. При увеличении расходов и снижении доходов государства правительство вынуждено идти на повышение уровня инфляции, что ведет к дестабилизации производства и снижению его эффективности, а также к неминуемому росту цен (см. модель инфляции в предыдущей лекции).

Наступивший экономический кризис, характеризуемый низкой эффективностью производства, ведет к неминуемому падению популярности правительства и существенному росту влияния консерваторов. Малоимущие слои населения, добившиеся определенного повышения своего благосостояния, уже не отличаются высокой политической активностью и даже смеют выражать явное недовольство своими благодетелями в связи с неуклонным ростом цен. С другой стороны, возрастает политическая активность более состоятельных граждан, кровно заинтересованных в стабилизации экономики и повышении эффективности производства. В этих условиях на очередных или даже досрочных парламентских выборах к всеобщему удовлетворению неблагодарных сограждан побеждает консервативная оппозиция.

Правительство консерваторов начинает активно бороться за оздоровление экономики. Оно решительно сокращает статьи государственных расходов, существенно снижает налоги, проводит денационализацию производства. Вследствие снижения налогов в отечественные предприятия направляется значительный капитал, в том числе, иностранный. Убыточные предприятия благополучно разоряются из-за серьезного сокращения государственных дотаций. В целях повышения эффективности производства нерентабельные предприятия передаются в частные руки, а корыстолюбивый хозяин, стремясь добиться максимальной прибыли, увольняет лишних служащих, разучившихся как следует работать за время бесславного правления легкомысленных лейбористов. Наступает долгожданная финансовая стабилизация и заметное повышение эффективности производства.

К сожалению, проводимый консерваторами курс на либерализацию экономики неминуемо приводит и к ряду весьма нежелательных последствий. Снижение статей расходов государства ведет к уменьшению размеров пенсий, пособий, стипендий. Вследствие перехода государственных организаций в частные руки и разорения убыточных предприятий стремительно растет безработица. Стабилизация экономики достигается в значительной степени за счет наименее защищенных слоев населения. В результате происходящих событий в стране углубляется социальная напряженность. Наступивший социально-политический кризис сопровождается резко возросшей политической активностью широких народных масс. В то же время активность более обеспеченных слоев населения, получающих сравнительно большие доходы, заметно снижается. Вследствие этого растет популярность лейбористов, героически отстаивающих интересы трудящихся, и снижается влияние консерваторов. В итоге на ближайших парламентских выборах к власти приходят лейбористы. Наступает новый цикл рассматриваемого процесса.

На практике мы действительно наблюдаем попеременный приход к власти партий с различными политическими платформами. Характерно, что чем выше экономический уровень в стране, чем больше период колебания. Отметим также, что в данном случае (как и во всех прочих) мы описывали не реальную ситуацию, а результат моделирования исследуемого процесса. Современные лейбористы и консерваторы давно уже научились проводить более гибкую политику и не столь уж различаются своими социально-экономическими программами. Политическая жизнь общества намного сложнее и лишь в незначительной степени поддается четкому математическому моделированию. Однако то же самое следовало бы сказать о физических, химических и других процессах. Едва ли имеет смысл резко противопоставлять естественные и гуманитарные науки.

#### **Компьютерный эксперимент. Двухпартийная система.**

Обратиться к задаче "*Парламент*". Выполнить следующие действия:

1. Убедиться в том, что периодическое все функции состояния являются периодическими.

2. Меняя коэффициенты уравнений при фиксированных начальных состояниях системы, обнаружить ее положение равновесия.

3. Меняя начальные состояния при неизменных коэффициентах уравнений, обнаружить положение равновесия системы.

# Лекция № 9 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СОЦИОЛОГИИ И ПСИХОЛОГИИ

*Математика – это искусство давать различным вещам одинаковые названия.*

Анри ПУАНКАРЕ

В данной лекции рассматриваются ряд социально-политических и психологических моделей, с поразительной точностью напоминающих по своей форме рассмотренные ранее системы. В частности, изменение влияния профсоюза на производстве и представленные в приложении модели эффективности государственного аппарата и взаимодействия между колонией и метрополией описывается уравнениями Вольтерра – Лотки. В этих задачах влияние профсоюза и численность государственных чиновников, а также доходы колонии и метрополии возрастают и убывают периодически подобно поведению численности хищников и жертв в соответствующей модели.

Новые интерпретации модели конкуренции связаны с борьбой за   
лидерство в коллективе и за территорию между племенами. Допуская здесь неоднородность группы или территории, приходим к очередным вариантам модели ниши. Такими же уравнениями описываются семейные отношения   
в треугольнике муж – жена – свекровь. Своеобразным аналогом явления   
симбиоза служат отношения между союзниками при ведении боевых действий с общим противником.

## 1. ПРОФСОЮЗНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Рассмотрим достаточно простую динамическую модель профсоюзной деятельности на производстве. Функциями состояния здесь будут степень влияние профсоюза *х*1 и социальные условия *х*2 на рассматриваемом предприятии. Предполагается, что при существенном ухудшении социальных условий влияние профсоюза растет с некоторой скоростью ε1 , а при полном отсутствии влияния профсоюза социальные условия ухудшаются с постоянной скоростью ε2 . Рост влияния профсоюза сопровождается улучшением социальных условий, что, в свою очередь, приводит к падению влияния профсоюза. Таким образом, математическая модель рассматриваемого процесса принимает вид

,

где константы γ1 и γ2 являются параметрами задачи.

Приведенные уравнения уже встречались ранее при описании химических, биологических и экономических процессов. Как известно, они имеют периодическое решение (см. рис. 45). Если в начальный момент времени влияние профсоюза достаточно слабое, а социальные условия – низкие, то правая часть первого уравнения положительна, а второго – отрицательна. Таким образом, на первой стадии процесса наблюдается рост влияния профсоюза (все больше трудящихся при плохих социальных условиях на производстве обращается за помощью к профсоюзу) и дальнейшее ухудшение социальных условий (при слабом влиянии профсоюза жадный предприниматель стремится извлечь максимальную прибыль за счет жестокой эксплуатации бесправных трудящихся). С ростом влияния профсоюза непременно наступает момент перехода ко второму этапу, когда предприниматель уже вынужден считаться с профсоюзом и под угрозой забастовки идет на определенное удовлетворение справедливых требований своих сотрудников. Происходит улучшение социальных условий при непрекращающемся росте влияния профсоюза, пользующегося все возрастающей поддержкой рабочих и служащих. Однако по мере подъема жизненного уровня у неблагодарных людей постепенно отпадает необходимость оказывать поддержку профсоюзу. На третьем этапе влияние профсоюза начинает падать, в то время как социальные условия на производстве пока еще растут, поскольку профсоюз остается еще достаточно   
сильным, а потому предприниматель не рискует проводить какие-либо нехорошие мероприятия. Однако с падением влияния профсоюза   
корыстолюбивый собственник начинает бороться за повышение своих доходов (естественно, за счет ни в чем не повинных трудящихся). На четвертом этапе наблюдается дальнейшее снижение влияния профсоюза (социальные условия еще сравнительно высоки, и профсоюз не успел набрать силу) и ухудшение жизненных условий. По мере ухудшения уровня жизни трудящихся со временем профсоюз вновь восстанавливает свое влияние и процесс повторяется.

Сравнительная характеристика различных моделей типа   
"*хищник-жертва*" приводится в табл. 12.

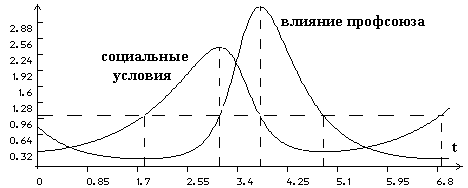


Рис. 45. Колебание влияния профсоюза   
и социальных условий на производстве.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Профсоюз".**

Обратиться к модели "*Профсоюз*". Убедиться в том, что состояние   
системы меняется со временем периодически. Обнаружить нетривиальное положение равновесия системы.

## 2. БОРЬБА ЗА ЛИДЕРСТВО

Рассмотрим некоторую изолированную группу людей, являющихся в силу тех или иных причин достаточно тесно связанными между собой. Это может быть вновь образующийся профессиональный коллектив, группа случайных попутчиков, неожиданно оказавшаяся в длительной изоляции от внешнего мира, группа туристов, шайка бандитов и т.д. В подобном сообществе может быть заранее признанный всеми официальный лидер. Однако часто возникает ситуация, когда либо такового лидера не было изначально, либо он выбыл из коллектива по каким-либо причинам, либо полностью дискредитировал себя. В таких условиях, как правило, кто-нибудь из группы пытается взять всю инициативу на себя. При этом зачастую на лидерство претендует сразу несколько человек. Мы рассмотрим ситуацию, когда в группе имеется два потенциальных лидера, между которыми происходит борьба за влияние в коллективе.

Табл. 12. Характеристика моделей типа "*хищник-жертва*".

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | наука | модель | ф у н к ц и и с о с т о я н и я | |
| 1 | химия | реакция Лотки | концентрация первого продукта | концентрация второго продукта |
| 2 | биология | хищник – жертва | численность жертв | численность хищников |
| 3 | сельское  хозяйство | плодородие – урожайность | плодородие почвы | урожайность  культуры |
| 4 | экономика | свободный рынок | доходы населения | уровень цен |
| 5 | экономика | монополизированный рынок | доходы населения | объем производства |
| 6 | экономика | предприниматель – рэкетир | доход предпринимателя | доход рэкетира |
| 7 | социология | профсоюз | влияние профсоюза | социальные условия |
| 8 | социология | государственный аппарат | эффективность реформ | численность аппарата |
| 9 | социология | метрополия – колония | доходы колонии | доходы метрополии |

В качестве состояния системы выбираются функции *x*1 и *x*2 ,   
характеризующие степень влияния каждого из лидеров. Предполагается, что каждый из лидеров проявляет определенную активность, подтверждающую его право на лидерство. Таким образом, влияние *i*-ого лидера росло бы с некоторой скоростью ε*i* в случае неограниченности группы. Однако в действительности рост популярности лидеров снижается тем сильнее, чем больше членов группы уже отдали на данный момент предпочтение кому-либо из лидеров. В результате приходим к уравнениям

, i = 1,2 ,

где коэффициенты β*i*являются параметрами задачи и характеризуют степень привлекательности планов, предлагаемых соответствующим лидером.

Мы в очередной раз сталкиваемся с моделью конкуренции. Как известно, здесь побеждает тот лидер, у которого выше активность и привлекательнее планы, а точнее, тот, у которого произведение ε*i* β*i* принимает наибольшее значение. Таким образом, со временем вся группа признает одного лидера, оказавшегося наиболее авторитетным.

Сравнительный анализ моделей конкуренции в различных   
интерпретациях приводится в таблице 13.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Лидер".**

Обратиться к модели "*Лидер*". Провести следующий анализ:

1. Подобрать коэффициенты модели так, чтобы победил первый лидер.

2. Подобрать коэффициенты модели так, чтобы победил второй лидер.

3. Рассмотреть случай, когда силы лидеров равны.

Табл. 13. Характеристика моделей конкуренции и ниши.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | наука | модель | функции состояния | предмет  конкуренции |
| 1 | физика | двухмодовый лазер | число различных типов фотонов | возбужденные атомы |
| 2 | химия | химическая конкуренция  реагирующих веществ | концентрация "конкурирующих" веществ | реагирующее вещество |
| 3 | биология | биологическая конкуренция видов | численность видов | пища |
| 4 | экономика | экономическая  конкуренция фирм | капиталы фирм | потребители товаров |
| 5 | политология | политическая конкуренция партий | влияние партий | голоса избирателей |
| 6 | социология | борьба племен | контролируемая территория | свободная территория |
| 7 | психология | борьба за лидерство в группе | влияние лидеров | признание в группе |
| 8 | психология | семейные отношения | авторитет свекрови и невестки | влияние  на сына (мужа) |

## 3. СЕМЕЙНАЯ ИСТОРИЯ

Рассмотрим семью, состоящую из мужа, жены и его матери. Предполагается, что свекровь и невестка находятся в теплых семейных отношениях, изо всех сил стараясь утвердить свое влияние на единственного мужчину в семье. А тот, бедняга, разрывается между горячей любовью к матери и жене. Функциями состояния здесь будут степени влияния *x*1 и *x*2 соответственно, свекрови и невестки на любимого сына и мужа.

Предполагается, что скорость изменения влияния каждой из женщин пропорциональна значению этой величины. Как свекровь, так и невестка имеют отличные отношения с "главой семьи", так что прирост их влияния непременно включает в себя некоторую положительную величину ε*i* , определяемую достоинствами данной женщины в глазах мужчины. Если бы прирост влияния ограничивался лишь этим фактором, то мы наблюдали бы неограниченный рост влияния каждой из женщин. На практике рост влияния естественно сдерживается. В частности, имеется также и падение влияния, характеризуемое выражением -α*ii* *xi* , где параметр α*ii* характеризует снижение влияния *i*-ой женщины, определяемый ее личными недостатками в глазах мужчины. Наконец, свекровь и невестка стремятся снизить влияние соперницы на мужчину, вследствие чего прирост влияния *i*-ой женщины включает в себя также отрицательное выражение -α*ij* *xj* , где константа α*ij* характеризует степень антипатии к данной женщине ее соперницы.

На основе сделанных предположений заключаем, что исследуемый процесс описывается следующей системой уравнений, где   
константы γ1 и γ2 являются параметрами задачи

.

Полученные соотношения соответствуют рассмотренной в предшествующей лекции модели ниши со всеми вытекающими отсюда последствиями. В зависимости от сочетания параметров события могут развиваться по различным сценариям.

При выполнении неравенств

ε1/α11 > ε2/α21 , ε1/α12 > ε2/α22

невестка по всем статья проигрывает свекрови. Вследствие этого   
ее влияние на супруга постепенно сходит на нет, что неминуемо влечет за собой развод или, по крайней мере, безоговорочное подчинение невестки решительной и властной свекрови. Противоположные соотношения напротив означают полное поражение свекрови. Она либо покоряется более энергичной невестке, либо поселяется отдельно от неблагодарных супругов. Условия

ε1/α11 = ε2 /α21 , ε1 /α12 = ε2 /α22

свидетельствуют о равенстве сил противоборствующих сторон. Милые особы продолжают вести активные боевые действия с переменным успехом, причем ни одна из них не в состоянии окончательно   
одержать верх. Неравенства

ε1/α11  > ε2/α21 , ε1/α12 < ε2/α22

соответствуют случаю, когда определяющую роль играют не личные качества женщин (отношения достоинств к недостаткам), а степень их взаимной антипатии. Исход здесь также оставляет желать лучшего – в зависимости от начального состояния системы (отношениям враждующих сторон с мужчиной к началу их совместного проживания) полную победу одерживает либо невестка, либо свекровь. Наконец, остается еще вариант, характеризуемый условиями

ε1/α11 < ε2/α21 , ε1/α12 > ε2/α22 ,

при которых личные качества женщин берут верх над их взаимной антипатией. Каждая из них находит свою нишу, а в семье со временем воцаряется мир и покой.

Описанная модель никак не учитывает реакцию на происходящие события самого виновника и предмета раздоров. Однако так ли уж нужно спрашивать мнение авторитетного главы семьи, когда серьезный спор идет между любящими представительницами слабого пола? Впрочем, отношения между тещей и зятем характеризуются не менее захватывающими событиями.

Сравнительный анализ моделей ниши в различных интерпретациях приводится в табл. 13.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Семья".**

Обратиться к модели "*Семья*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что побеждает свекровь при любых начальных состояниях системы.

2. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что при любых условиях системы побеждает невеста.

3. Провести расчеты при выполнении условия  Меняя начальные состояния системы, добиться победы как невестки, так и свекрови.

4. Провести расчеты при выполнении условия . Убедиться в том, что обе сохраняют определенное влияние на мужчину.

## 4. СОЮЗНИКИ

Рассмотрим две страны, сражающиеся с общим противником. Предполагается, что противник значительно сильнее и способен победить каждого из союзников в отдельности. Однако при их активном взаимодействии противник может оказаться побежденным. Чем сильнее один союзник, тем проще вести боевые действия другому союзнику. В результате приходим к уравнениям

 (9.4)

где *хi* – сила *i*-ого союзника, ε*i*– скорость его поражения в отсутствии другой союзника, γ*i* – показатель влияния *j*-ого союзника на *i*-ого.

Полученные соотношения точностью до обозначений совпадают с биологической моделью "*симбиоз*" и экономической моделью "*экономическое сотрудничество*". Зная свойства последних, приходим к следующим результатам. Если оба союзника сравнительно слабы, то полную победу одерживает противник. В противном случае силы союзников неограниченно возрастают. В случае, когда один из союзников достаточно слаб, а другой – силен, исход боевых действий определяется соотношением между всеми параметрами системы. Здесь возможны как победа, так и поражение союзников.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Союзники".**

Обратиться к модели "*Союзники*". Провести следующий анализ:

1. Убедиться в том, что при сравнительно малых значениях начальных состояний системы союзники терпят поражение.

2. Убедиться в том, что при сравнительно больших значениях начальных состояний системы союзники побеждают.

3. Для случая, когда один из союзников достаточно силен, а другой – сравнительно слаб, установить как победу, так и поражение союзников.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приводятся новые интерпретации хорошо знакомых нам моделей типа "*хищник – жертва*" (эффективность государственного аппарата, взаимоотношения между колонией и метрополией), конкуренции (борьба племен), ниши (размежевание племен, раскол группы).

### **1. Государственный аппарат.**

Рассмотрим функционирование государственного аппарата во   
время проведения широкомасштабных экономических и политических   
реформ. Нас будет интересовать, прежде всего, эффективность проведения реформ, которую можно охарактеризовать меняющейся со временем функцией *x*1 . Для реализации реформ необходим соответствующий государственный аппарат, численность которого *x*2 выбирается в качестве второй функцией состояния. Будем полагать, что в естественных условиях при отсутствии противодействия экономическим преобразованием со стороны государственного аппарата реформы развиваются с некоторой скоростью ε1 . Однако по мере роста численности государственных чиновников происходит пропорциональное падение темпов реформ. В свою очередь, в случае полного провала экономических реформ производится сокращение государственного аппарата с заданной скоростью ε2 . При углублении же реформ требуется привлечение все большего количества государственных чиновников для реализации правительственной программы. В результате приходим к уравнениям

,

где константы γ1 и γ2 являются параметрами задачи. Полученная система аналогична модели "*хищник-жертва*" и имеет периодические решения.

С возрастанием темпов реформ возникает необходимость в увеличении численности участвующих в управлении государства служащих, которые призваны непосредственно воплощать в жизнь решения правительства. Однако разросшийся государственный аппарат постепенно становится тормозом реформ, а темпы их проведения неуклонно падают. Замедление темпов реформ свидетельствует о низкой эффективности работы государственного аппарата. Для преодоления возникших трудностей проводится реорганизация аппарата с неизменным сокращением штатов государственных чиновников. Государственный аппарат становится более мобильным, а темпы проведения реформ ускоряются. Однако для их поддержания имеющейся численности государственных служащих почему-то оказывается недостаточно. Аппарат постепенно разбухает, а ход реформ, напротив, замедляется. Мы приходим к новому этапу рассматриваемого процесса. Полученные результаты проливают определенный свет на неистребимую способность чиновничества к выживанию при любых государственных потрясениях.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Бюрократия".**

Обратиться к модели "*Бюрократия*". Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически. Обнаружить положение равновесия системы.

### **2. Борьба племен.**

Рассматривается борьба двух племен за территорию. Предполагается, что племена имеют один и тот же образ жизни и ориентируются на одинаковую среду обитания. В случае малочисленности племен и неограниченности свободной территории племена постоянно расширяют свое влияние. Однако в условиях ограниченности незаселенной территории они вступают в конкуренцию между собой. Необходимо установить изменение со временем территории, контролируемой каждым из племен, при условии, что начальные значения этих величин известны. Рассматриваемый процесс описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений

**,**  *i* = 1,2 **,**

где *xi* – размер территории *i*-ого племени в момент времени *t*, ε*i*– активность племени,β*i*– эффективность освоения территории. Мы получаем еще один вариант модели конкурентной борьбы. Ее исход предопределен – более сильное племя постепенно захватит всю территорию, поглотив либо уничтожив всех своих конкурентов.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Трайбализм".**

Обратиться к модели "*Трайбализм*". Убедиться в том, что в зависимости от сочетания коэффициентов уравнений побеждает то или другое племя.

### **3. Размежевание племен.**

Если в предшествующей задаче предположить, что каждое из племен отдает предпочтение особой среде обитания (например, одним больше по душе степи или долины рек, а другие чувствуют себя уютнее в горах или в лесах), то события могут развиваться по иному сценарию. В этом случае процесс описывается уравнениями



где параметры βij характеризуют эффективность освоения *i*-ым племенем *j*-ой территории. При определенном сочетании параметров здесь возможно размежевание племен – каждое из них постепенно захватывает ту территорию, которой оно отдает большее предпочтение. Примерно такие явления наблюдались в процессе образования государств. Не случайно границы государств чаще всего имеют естественный характер, соответствующий линии размежевания населяющих их народов.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Война".**

Обратиться к модели "*Война*". Убедиться в том, что при выполнении условия  оба народа сохранят за собой некоторую территорию. Показать, что при другом сочетании параметров один из народов полностью вытесняется со своей территории.

### **4. Модель "Метрополия – колония".**

Рассматривается взаимоотношения между колонией и метрополией. Предполагается, что в отсутствии метрополии колония богатеет, а в отсутствии колонии метрополия беднеет. Чем богаче колония, тем больше получает от нее метрополия. Чем сильнее метрополия, тем больше она эксплуатирует колонию. В результате приходим к еще одному варианту модели "*хищник - жертва*". Исход событий нам известен. Метрополия стремится как можно сильнее обогатиться за счет колонии. Однако по мере постепенного ослабления колонии, метрополия вынуждена снижать объем взимаемой дани. В результате со временем колония восстанавливает свое богатство, после чего метрополия на некоторое время получает возможность более интенсивно эксплуатировать колонию. После этого беднее колония, а вслед за ней – и метрополия, и события начинают повторяться.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Колониализм".**

Обратиться к модели "*Колониализм*". Убедиться в том, что состояние системы меняется со временем периодически.

### **5. Модель "Раскол группы".**

Рассмотрим задачу о конкуренции лидеров в группе. Если каждый из потенциальных лидеров стремится заручиться поддержкой не всего коллектива, а ориентируется главным образом на какую-то объединенную общими интересами группировку, то мы снова приходим к модели "*ниши*". При некотором сочетании параметров (см. выше) вытеснение одного лидера другим не происходит, а оба они сохраняют определенное влияние. Каждый из них со временем оказывается во главе части коллектива. Тем самым наблюдается раскол группы на две более или менее изолированные и существенно более устойчивые (по сравнению с исходным коллективом) группировки со своими признанными авторитетами.

Отметим, что подобным результатам можно придать и несколько иную интерпретацию. Возможно, лидеры будут искать свою "нишу" не в завоевании популярности у части членов группы, а в закреплении за собой некоторой сферы деятельности, в которой каждый их них признается безоговорочным авторитетом. Так, при формировании нового творческого коллектива один из лидеров может взять на себя решение профессиональных вопросов, а другой - организационных дел. В туристской группе лидеры могут поделить между собой хозяйственные и тактические функции. В подобной ситуации раскол коллектива носит функциональный характер, а группа продолжает существовать как единое целое при непременном условии, что каждый из лидеров признает за другим главенство в его сфере деятельности.

#### **Компьютерный эксперимент. Модель "Соперники".**

Обратиться к модели "*Соперники*". Убедиться в том, что при соответствующих условиях оба соперника объединят вокруг себя некоторое количество сторонников.

## КОММЕНТАРИИ к лекциям 7 - 9

Различные математические вопросы и модели экономических систем описываются в книгах А. С. Ашманова [6], О. О. Замкова, Ю. А. Черемных,   
А. В. Толстопятенко [36], Ю. Иванилова, А. Лотова [37], К. Ланкастера [64],   
Н. Н. Моисеева [93], И. Экланда [150] (см. также [111]); математические методы в социологии – у Э. В. Каракозовой [42], Ю. М. Плотинского [104],   
В. А. Устинова и А. Ф. Фелингера [131], Дж. Форрестера [135], J. Cameny,   
J. Snell [156], R. Hanneman [158], R. Huckfeldt et all. [159] (см. также [79]); в политологии – у Ю. П. Иванова [38], (см. также [107]); в психологии – у   
Г. Биркгоффа [12], Г. Е. Журавлева [34] (см. также [21], [81]); в истории – у   
А. С. Гусейновой, Ю. Н. Павловского, В. А. Устинова [28], И. Д. Ковальченко [47], В. А. Устинова и А. Ф. Фелингера [131], R. Hanneman, J. R. Holllingsworth [157] (см. также [54], [82] – [84], [87]).

В лекции № 14 будут рассмотрены некоторые распределенные экономические модели.

Сравнительный анализ важнейших типов взаимодействия двух субъектах в различных интерпретациях приводится в табл. 14.

Табл. 14. Сравнительный анализ основных типов моделей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| наука | м о д е л и | | | |
| хищник - жертва | конкуренция | ниша | симбиоз |
| физика |  | двухмодовый лазер |  |  |
| химия | система реакций Лотки | химическая конкуренция | химическая ниша |  |
| биология | хищник - жертва  урожайность - плодородие | биологическая конкуренция | экологическая ниша | симбиоз |
| экономика | свободный рынок  монополизированный рынок  рэкетир - предприниматель | экономическая конкуренция | экономическая ниша | сотрудничество фирм |
| социология | профсоюз  государственный аппарат  метрополия - колония | борьба племен | размежевание племен | союзники |
| политология |  | политическая конкуренция | политическая ниша |  |
| психология |  | борьба за лидерство | раскол в группе  семейные отношения |  |

# Лекция № 10 ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

*Поскольку наш мир устроен наисовершеннейшем образом и   
является творением всеведущего Творца*, *во всем мире не происходит ничего такого*, *в чем не было бы воплощено какое-либо правило максимума или минимума.*

Леонард ЭЙЛЕР

До сих пор математическими моделями исследуемых процессов неизменно были дифференциальные уравнения. Цель данной лекции состоит в том, чтобы показать, что закон эволюции системы можно вывести из некоторой экстремальной задачи, которая сама оказывается математической моделью исследуемого процесса. Простейшим примером будет рассмотренная в лекции № 1 задача о падении тела. Оказывается, что соответствующее уравнение состояния можно вывести из условия минимума энергии, затрачиваемой на движение тела. Этот результат является частным случаем принципа наименьшего действия, согласно которому эволюция системы на данном интервале времени осуществляется по тому пути, который соответствует минимальным энергетическим затратам. В качестве естественного следствия из принципа наименьшего действия можно получить также хорошо известное уравнение движения материальной точки.

Исследование экстремальной задачи осуществляется в результате варьирования траектории, что позволяет установить уравнение Эйлера относительно искомой траектории движения. В качестве примера исследуется задача о брахистохроне, состоящая в отыскании такой линии, соединяющей две точки, двигаясь по которой под действием собственного веса тело пройдет соответствующий путь за минимальное время.

## 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПАДЕНИЯ ТЕЛ

Вернемся к исследованию рассмотренного в первой лекции   
процесса падения тела под действием собственного веса. Как и раньше в качестве функции состояния выбираем высоту тела *х* над землей. Определим его полную механическую энергию *E*(*t*) в произвольный момент времени *t*. Она складывается из кинетической энергии *K*(*t*) и потенциальной энергии *U*(*t*)

*E*(*t*) = *K*(*t*) + *U*(*t*) .

Потенциальная энергия представляет собой энергию сил тяготения и равна произведению веса тела *Р* на его высоту над землей

*U*(*t*) = - *Р* *x*(*t*) = - *m g* *x*(*t*) ,

где *m* – масса тела, *g* – ускорение свободного падения, а знак "минус" обусловлен тем, что действие сил тяготения направлено в сторону, противоположную возрастанию координаты *х*. Кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости движущегося тела.

 .

В результате находим значение полной механической энергии падающего тела в произвольный момент времени

. (10.1)

Рассмотрим некоторый интервал времени [*t*0 , *t*1] , на протяжении которого тело продолжает падать. При этом совсем не обязательно, чтобы момент времени *t*0 соответствовал началу, в *t*1 – концу падения тела. Предположим, что начальное и конечное положения тела известны и принимают некоторые значения *х*0 и *х*1 соответственно, т.е. справедливы равенства

*x*(*t*0) = *x*0 , *x*(*t*1) = *x*1  . (10.2)

Все траектории *x* = *x*(*t*) при *t*∈[*t*0,*t*1] , удовлетворяющие условиям (10.2), будем называть допустимыми. Зададимся вопросом, *какой из допустимых траекторий соответствует минимальные затраты энергии*?

Если бы в процессе движения энергия тела не менялась и была бы равна некоторому значению *Е*\*, то энергетические затраты за время от *t*0 до *t*1 были бы равны *Е*\*(*t*1 – *t*0) . Однако, как видно из формулы (10.1), по мере падения тела его энергия меняется, поскольку со временем происходит движение тела. Тогда для вычисления затрат энергии на данном интервале времени, соответствующей допустимой траектории *х*, следует проинтегрировать равенство (10.1) по времени. В   
результате находим величину

 ,

которая называется *действием системы* на интервале времени [*t*0 , *t*1] с допустимой траекторией *х* и выражает затраты энергии в процессе движения тела от точки *х*0 до точки *х*1 по траектории *x* = *x*(*t*) . С математической точки зрения она является *функционалом*, поскольку ставит в соответствие функции *х* некоторое число *S* [*x*] .

Итак, мы имеем задачу отыскания такой функции *х*, удовлетворяющей условиям (10.2), которая минимизирует функционал *S* в классе всевозможных допустимых траекторий. Задачи на экстремум функционалов принято называть *вариационными*. Они служат предметом   
*вариационного исчисления*.

Попытаемся установить, какими свойствами будет обладать   
решение полученной задачи. Определим функцию ϕ с помощью   
равенства

ϕ(*t*) = *x*(*t*) + σ *h*(*t*) , *t*∈[*t*0,*t*1] ,

где *х* – решение вариационной задачи, σ – некоторое число, *h* – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

*h*(*t*0) = 0, *h*(*t*1) = 0. (10.3)

Тогда траектория будет допустимой (см. рис. 46). В этом случае говорят, что проведено варьирование траектории *х*, причем разность   
σ*h* = ϕ – *x* называют *вариацией* *траектории*.



Рис. 46. Варьирование траектории.

Определим функцию *f* одной переменной σ

*f* = *f* (σ) = *S*[ϕ] = *S*[*x* + σ*h*] .

Поскольку величина *х* доставляет минимум функционалу *S*, то точка   
σ = 0 соответствует минимуму функции *f*. Необходимым условием экстремума функции в некоторой точке является равенство нулю ее производной в этой точке. Значение δ*S* соответствующей производной называют *вариацией функционала* *S*. Таким образом, искомая траектория должна удовлетворять условию

δ*S* = *f* '(0) = 0 . (10.4)

Найдем вариацию функционала



Проведем интегрирование по частям с учетом условия (10.3). Получаем

 .

В результате равенство (10.4) принимает вид

 (10.5)

Установленное соотношение выполняется для любой функции *h*,   
удовлетворяющей условиям (10.3).

Для преобразования полученного соотношения воспользуемся *основной леммой вариационного исчисления*, называемой также *леммой Эйлера* – *Лагранжа*. Согласно этому утверждению, если непрерывная функция ψ удовлетворяет равенству



для любых непрерывных функций *h* при выполнении условий (10.3), то справедливо равенство ψ(*t*) = 0 для всех значений *t*∈[*t*0,*t*1] . Пользуясь данным результатом для функции ψ =  + *g* , из соотношения (10.5) выводим равенство

 , (10.6)

выполняемое всюду на отрезке [*t*0,*t*1] . Учитывая произвольность   
выбора этого интервала, заключаем, что условие (10.6) выполняется на протяжении всего времени падения тела.

Отметим справедливость неравенства



для всех функций *h*, отличных от нуля. Это означает, что мы имеем дело с минимумом (а не максимумом) функции *f*, а значит, и функционала *S*.

Соотношение (10.6) есть не что иное, как установленное в   
лекции № 1 уравнение падения тела под действием собственного веса. За полученным результатом стоит один из наиболее глубоких законов природы, согласно которому *среди всех возможных вариантов эволюции системы реализуется тот, который соответствует минимальным затратам энергии*, т.е. минимальным действием. Этот закон   
называется *принципом наименьшего действия*. Рассмотрим его более подробно.

## 2. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Рассмотренные ранее математические модели механических систем выведены исходя из второго закона Ньютона. Однако существует общий способ получения этих результатов. В качестве математической модели динамической системы можно выбрать некоторый вариационный принцип. Согласно ему функции состояния исследуемого процесса должны доставлять минимум или максимум некоторому функционалу. При необходимости из этой вариационной задачи можно вывести уравнения движения подобно тому, как это делалось при получении уравнения падения тела. Мы ограничимся рассмотрением лишь одного из подобных результатов, опирающегося на принцип наименьшего действия.

Пусть задана материальная точка массы *m*, которая движется в пространстве под действием силы – векторной величины с компонентами *F*1 , *F*2 и *F*3 . В общем случае сила и масса меняются со временем. Движение точки в пространстве описывается ее координатами, т.е. составляющими вектор-функции

 .

Оценим энергию движущегося тела. Полная механическая   
энергия материальной точки в данный момент времени складывается из ее кинетической энергии и энергии действующей силы

*E*(*t*) = *K*(*t*) + *U*(*t*) .

Кинетическая энергия тела пропорциональна квадрату модуля вектора скорости

 .

Учитывая равенство

,

находим значение кинетической энергии

.

Энергия действующей силы равна скалярному произведению векторов  и 

 .

В результате находится полная энергия системы

 .

Рассмотрим некоторый интервал времени [*t*0 , *t*1] подобно тому, как это делалось ранее при выводе уравнения падения тела. Предположим, что при *t* = *t*0 и *t* = *t*1 тело находится в некоторых точках   
*х*0 = (*х*01, *х*02 , *х*03) и *х*1 = (*х*11 , *х*12 , *х*13) соответственно, т.е. выполнены условия

*xi*(*t*0) = *x*0*i*, *xi*(*t*1) = *x*1*i*, *i* = 1, 2, 3 .

*Принцип наименьшего действия*говорит о том, что движение тела от точки *х*0 к точке *х*1 под действием данной силы будет происходить по той траектории , которая доставляет минимум действию

 ,

т.е. соответствует минимальным затратам энергии за время от *t*0 до *t*1 .

Итак, мы получаем вариационную задачу, состоящую в минимизации функционала *S* в классе вектор-функций , удовлетворяющих указанным граничным условиям. Для ее исследования воспользуемся описанной ранее методикой. Определим вектор-функцию  следующим образом

,

где  – решение задачи, σ – произвольное число, а  – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, каждая компонента которой обращается в нуль на концах рассматриваемого интервала времени. Тогда траектория  оказывается допустимой.

Зададим вектор функцию одной переменной

 .

Как и в предшествующем случае, она имеет минимум в точке σ = 0 , что вновь приводит к уравнению (10.4) равенства нулю вариации функционала *S*. Найдем значение

.

Пользуясь формулой интегрирования по частям с учетом свойств функции , будем иметь

.

В результате получаем равенство

.

Последнее соотношение выполняется для всех функций *hi* , равных нулю на концах рассматриваемого интервала времени. Для фиксированного индекса *i* оставим функцию *hi* произвольной, а значения *hj* при *j* ≠ *i* будем считать тождественно равными нулю. Таким образом, получаем три независимых равенства

,

в каждом из которых сохраняется произвольность функции *hi* . Применяя основную лемму вариационного исчисления, установим соотношения

,

справедливые для всех *t*∈[*t*0,*t*1] . Учитывая произвольность выбранного интервала времени, заключаем, что последние равенства и их векторный аналог



выполняются в любой момент времени, пока движение материальной точки обусловлено действием силы. В результате мы получаем хорошо известное уравнение движения, соответствующее второму закону   
Ньютона, как следствие принципа наименьшего действия.

## 3. ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ

На основе вариационных методов могут быть решены различные проблемы. В качестве примера рассмотрим знаменитую задачу о брахистохроне. Пусть заданы точки *А* и *В* в вертикальной плоскости, не лежащие на одной прямой, перпендикулярной поверхности земли. Необходимо найти линию, соединяющую эти точки, такую, двигаясь по которой под действием собственного веса, тела попадет из одной точки в другую за минимальное время. Сила трения и сопротивление воздуха не учитываются.

Поместим точку *А* в начало координат. Движение тела будем рассматривать в плоскости, образованной вертикальной прямой, проходящей через точку *А*, и отрезком *АВ*. При этом координату *у* направим вертикально вниз, а координату *х* – горизонтально (см. рис. 47). Обозначим через (*х*1,*у*1) координаты точки *В*. Тогда исследуемая задача состоит в отыскании такой функции *у* = *у*(*х*) , которая удовлетворяет условиям

*у*(0) = 0 , *у*(*х*1) = *у*1 (10.7)

и соответствует минимальному времени на преодоления пути от точки *А* к точке *В*.

Если бы точки *А* и *В* находились на одной вертикально прямой, то рассматриваемый процесс можно было бы описать уравнением   
падения тела

** ,

причем знак "плюс" в его правой части объясняется тем, что в данном случае направление силы тяготения и вертикальной координаты совпадают.



Рис. 47. Движение тела в задаче о брахистохроне.

Установим скорость падающего тела в точке с координатой *у*. Учитывая равенства

** ,

находим производную



Таким образом, справедливо соотношение

*v* *dv* = *g* *dy* .

Интегрируя полученное выражение, установим равенство

*v*2/2 = *g y* + *c* ,

где *с* – произвольная постоянная. Учитывая, что при *у* = 0 , т.е. в точке *А* тела покоится (начальная скорость тела полагается равной нулю), заключаем, что константа *с* равна нулю. Тогда скорость падающего тела с вертикальной координатой *у* определяется по формуле

 .

Если исключить влияние силы трения и сопротивления окружающей среды, то как свободное падение тела, так и его скатывание по некоторой дуге *у* = *у*(*х*) , определяется исключительно действием силы тяготения. Тогда скорость тела на фиксированной высоте в обоих случаях будет одинаковой и равной *v* . Обозначим через *s* длину дуги данной кривой от точки *М* , в которой тело находится в момент времени (см. рис. 46) до начала координат – точки *А* . Тогда скорость движущегося тела равна

 . (10.8)

Естественно, путь, пройденный телом, а значит, и время, затраченное на его преодоление, существенным образом зависят от функции *у* = *у*(*х*) . Предположим, что тело, находящееся в момент времени *t* в точке *М* с координатами (*х*, *у*) , двигаясь по рассматриваемой кривой   
за достаточно малый интервал времени Δ*t* переместится в точку *M*' с координатами ( *х* + Δ*x* , *у* + Δ*y* ) (см. рис. 48).



Рис. 48. Вычисление длины дуги.

При достаточной малости величины Δ*t* длина дуги, соединяющей точки *М* и *M* ' , будет сколь угодно близка к длине отрезка *МM* ' , равной

.

При стремлении к нулю длины интервала времени Δ*t* точка *M* ' стремится к *М*, и мы получаем следующее выражение для элемента дуги

,

где *y*' = *dy*/*dx* .

В результате соотношение (10.8) может быть записано в виде

. (10.9)

Полученное выражение связывает горизонтальную координату движущегося тела *х* со временем *t*. Отметим, что при *t* = 0 , т.е. в начальный момент времени тело, находясь в точке *А* имея координату *х* = 0 . В некоторый конечный момент времени *Т* оно попадает в точку *В* с горизонтальной координатой *x*1 (см. рис. 47). Тогда в результате интегрировании равенства (10.9)

 .

Итак, если задана кривая *у* = *у*(*х*) , удовлетворяющая условиям (10.7), то, двигаясь вдоль нее под действием собственного веса, тело пройдет путь от точки *А* до точки *В* за время

 .

Тем самым задача о брахистохроне сводится к минимизации функционала *Т* на множестве функций, удовлетворяющих условию (10.9). В вариационном исчислении задача такого типа называется *задачей   
Лагранжа*.

Дальнейшее развитие теории экстремальных задач осуществляется в последующей лекции.

#### **Компьютерный эксперимент. Задача о брахистохроне.**

Обратиться к обучающему программному комплексу "*Математические модели естествознания*" к лабораторной работе "*Задача о брахистохроне*". Провести следующий анализ:

1. Убедиться, что движение тела по оптимальной кривой (брахистохроне) происходит быстрее, чем по прямой, связывающей начальную и конечную точку.

2. Провести расчеты с различными значениями координаты конечной точки.

3. Убедиться в том, что *у*1 = 0 тело падает вертикально вниз.

# Лекция № 11 ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Все к лучшему в этом лучшем из миров.*

Франсуа Мари ВОЛЬТЕР

В процессе исследования математических моделей мы старались определить зависимость функций состояния системы от времени (а при необходимости – и от пространственных переменных) при заданных значениях параметров системы. Однако на практике часто возникает задача выбора одного или нескольких параметров рассматриваемого процесса с целью достижения какой-то определенной цели, что соответствует задаче оптимального управления. Она состоит в отыскании таких значений параметров процесса, удовлетворяющих некоторым ограничениям (технического, технологического, экономического и т.п. характера), при которых некоторый критерий оптимальности достиг своего минимального или максимального значения. С математической точки зрения оптимизационные задачи являются обобщением рассмотренных в предшествующей лекции задач вариационного исчисления.

В настоящей лекции будет дана постановка задачи оптимального управления общего вида. В качестве примера исследуется задача максимизации дальности полета ракеты, решаемая с помощью принципа максимума.

К оптимизационным задачам могут быть также сведены также задачи идентификации математических моделей, состоящие в подборе таких значений параметров системы, для которых решение уравнений состояния в наилучшей степени соответствует известным результатам измерения.

## 1. УПРАВЛЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Развитие человечества до последнего времени происходило в значительной степени экстенсивно. По мере неуклонного возрастания численности населения и постоянного роста его потребностей осваивались новые земли, которые обеспечивали человека всем необходимым – пищей, одеждой, строительными материалами и т.д. Со временем расширялись зоны скотоводства и земледелия. Разрабатывались новые месторождения полезных ископаемых. Осваивались всё более мощные источники энергии. Модернизировались транспорт и средства связи. С развитием науки и техники находили применение новые   
материалы. Совершенствовались формы социального устройства   
общества и государственного управления.

Всё это вселяло уверенность в безграничность человеческих возможностей. Казалось, что, если не сегодня, то уж завтра непременно, пусть не при нас, но при наших внуках наверняка человечество достигнет таких рубежей, когда будут окончательно побеждены голод, нужда и болезни, когда люди обретут долгожданное счастье и покой, а на многострадальную землю снизойдет царство вечного мира и справедливости. Да и как было не мечтать об этом? За ничтожно малый по историческим меркам период времени человек пересел из телеги в автомобиль и самолет, освоил электричество и энергию атома, победил многие смертельные болезни, сдружился с телевизором и компьютером, вышел в открытый космос и высадился на Луну. Оглядываясь на вчерашние успехи, можно было бы в обозримом будущем ожидать ещё более грандиозных побед. Казалось, вот-вот мы достигнем всеобщего мира и благоденствия...

К сожалению, эти прекрасные грандиозные планы в значительной степени оказались иллюзорными. В действительности, мы сталкиваемся со стремительным истощением природных ресурсов при неуклонном росте численности населения. Наблюдается резкое ухудшение состояния окружающей среды. Надежды на то, что мощные неистощимые источники энергии навсегда покончат с нуждой и невзгодами, по существу, не оправдались. Миллионы людей по-прежнему голодают. На смену одним болезням приходят другие, еще более страшные. Попытки радикального переустройства общества с целью скорейшего достижения всеобщего счастья фактически провалилась. Войны как и прежде сотрясают землю. Человек сменил каменный топор на соху, а соху на компьютер, но не стал от этого чище и добрее.

Со временем всё более отчетливо становилось ясно, что возможности экстенсивного пути развития общества практически исчерпаны. И уж если мы действительно хотим как-то устоять в этом не очень уютном мире, то необходимо трезво оценить свои силы и средства и попытаться разумно распорядиться ими. Наша задача состоит в том, чтобы среди всех имеющихся в данный момент времени вариантов развития событий выбрать тот, который в наибольшей степени отвечает нашим интересам. Да, наши возможности далеко не безграничны. Но у нас всё-таки есть еще определенная возможность хоть как-то повлиять на ход развития событий, а значит, управлять теми или иными процессами. Целью управления является выбор оптимального пути развития среди всех допустимых вариантов. В результате мы приходим к задачам оптимального управления.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Дадим общую постановку задачи оптимального управления. Прежде всего, необходимо иметь *математическую модель* исследуемого процесса – основу для применения любых математических методов. При этом рассматриваемая система непременно должна обладать определенной *степенью* *свободы*, т.е. изучаемый процесс не может быть строго детерминированным. Это означает, что должно быть некоторое количество возможных вариантов эволюции системы, среди которых можно выбрать тот, который нам покажется наиболее предпочтительным. Тем самым, исследуемый процесс оказывается *управляемым*. Применительно к математической модели это означает, что уравнения состояния системы включают в себя один или несколько параметров, которые допустимо менять по воле исследователя в разумных пределах. При этом варьируемый параметр по своей природе может оказаться числом, вектором, функцией, вектор-функцией и т.д. В любом случае он называется *управлением*.

Итак, мы имеем уравнение состояние управляемой системы,   
которое в общем случае может быть записано в виде операторного уравнения

*А*(*u*) *x*  = 0 ,

где *А*(*u*) – *оператор состояния*, зависящий от управления *u*, *х* – функция состояния системы. В частности, во многих случаях состояние системы можно описать вектор-функцией

*х*  = *х*(*t*) = ( *х*1(*t*) , *х*2(*t*) , ... , *хn*(*t*) ) ,

а в качестве управления – выбрать вектор-функцию

*u* = *u*(*t*) = ( *u*1(*t*) , *u*2(*t*) , ... , *ur*(*t*) ) .

Все рассмотренные ранее процессы описывались некоторой системой дифференциальных уравнений относительно функции состояния *х*. В данном случае эта система включает в себя и управление *u*. В качестве примера можно рассмотреть уравнение

 (11.1)

на некотором интервале времени [*0*,*T*]с начальным условием

*x*(0) = *x*0 , (11.2)

где *f* – известная вектор-функция своих аргументов, а *x*0 – заданный вектор *n*-го порядка. Меняя управление *u*, мы получаем разные решения задачи Коши (11.1), (11.2), т.е. разные варианты эволюции исследуемой системы. Теперь, естественно, предстоит разумным образом воспользоваться имеющейся свободой выбора.

Надо, однако, иметь в виду, что возможности изменения управления на практике, как правило, не беспредельны. На систему обычно налагаются различного рода *ограничения* – технические, технологические, экономические, какие-либо другие. В частности, чрезмерно   
активное вмешательство в рассматриваемый процесс может привести к нарушению технологии производства, к качественным изменениям, которые влекут за собой нежелательные последствия. Но и недостаточно активное вмешательство, также может оказаться причиной технологических нарушений. Кроме того, применяемая нами аппаратура, посредством которой мы управляем системой, имеет ограниченный диапазон действия. Наконец, мы (как это не печально) всегда ограничены в средствах, в ресурсах, во времени. Так или иначе, управлять системой, как правило, мы можем лишь в каких-то достаточно четко выраженных пределах. Таким образом, постановка оптимальной задачи предполагает еще задание *множества допустимых управлений U*, характеризующего всевозможные ограничения на систему.

Выбирая управление *u* из данного множества *U*, мы получаем тот или иной возможный ход развития событий. Возникает естественный вопрос, на каком из допустимых управлений следует остановиться? Необходимо непременно задать *критерий оптимальности* управления – такую характеристику, которая позволила бы установить   
степень предпочтительности одного управления другому. При этом может возникнуть естественный соблазн попытаться достичь сразу нескольких целей, установив соответствующее количество различных показателей эффективности. К сожалению, такой путь, как правило, оказывается не корректным.

Возьмем, к примеру, популярный в недавнем прошлом лозунг – выпускать продукции "*больше*, *лучшего качества и с наименьшими затратами*". Каждый из указанных трех критериев эффективности работы производства вполне логичен. Однако попытка добиться наилучших показателей по всем трем признакам одновременно заведомо обречена на провал. Если мы попытаемся выпускать как можно   
больше продукции, то едва ли добьемся её высокого качества и низких затрат на производство. Высочайшее качество продукции обычно   
достигается при её выпуске небольшими партиями и требует значительных финансовых вложений. Наименьшие же затраты легко достигаются в том случае, когда продукция вообще не выпускается.

Еще один характерный пример. Казалось бы, естественно попытаться построить общество, в котором в наивысшей степени были бы реализованы свобода и равенство всех граждан. Однако что произойдет, если всем людям будет предоставлена полная свобода действия?   
К сожалению, все мы далеко не равны по своей природе. Одни люди оказываются умными, а другие – не очень; кто-то более энергичен, а кто-то – ленив; есть люди больные, а есть и вполне здоровые; кому-то в жизни повезло, а кто-то, напротив, оказался неудачником. Если даже всех нас поставить в абсолютно равные условия, то в скором времени кто-то непременно вырвется вперед, оставив других далеко позади. Реализовав в полной степени вполне благородный принцип свободы, мы неминуемо со временем придем к существенному неравенству.

Как же можно добиться всеобщего равенства? Едва ли возможно всех дураков сделать умными, слабых и больных – здоровыми, лентяев – тружениками. Единственный реальный способ достичь желаемого равенства состоит в том, чтобы отнять все излишки у того, кто живет слишком хорошо, и передать их тому, у кого дела обстоят не самым лучшим образом. И тем самым воспрепятствовать наиболее сильным и умным, хитрым и предприимчивым в полной степени реализовывать свои возможности и вырываться вперед. Таким образом, достижение всеобщего равенства неизбежно ведет к значительным ограничениям на свободу. Достижение полной свободы и равенства одновременно заведомо обречено на провал, в чем мы уже имели возможность убедиться.

Итак, критерием оптимальности непременно должен быть   
некоторый функционал *I = I*(*x*,*u*) , зависящий от состояния системы   
и управления. Его значением будет конкретное число, однозначно   
характеризующее степень эффективности выбранного управления. Если состояние системы характеризуется задачей Коши (11.1), (11.2), то рассматриваемый функционал, как правило, имеет вид

 ,

где *f*0 и Ф – известные функции своих аргументов. При этом первое слагаемое характеризует эффективность течения процесса на всем исследуемом интервале времени, а второе связано с конечным состоянием системы.

В результате приходим к следующей формулировке*задачи   
оптимального управления***:** необходимо найти такой элемент *u* из множества *U* , который минимизирует на этом множестве функционал *I* . Рассмотрим один конкретный пример подобной задачи.

## 3. МАКСИМИЗАЦИЯ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА РАКЕТЫ

В лекции № 1 описывалась математическая модель движения ракеты. В начальный момент времени *t* **=** 0 ракета стартует с земли. Вплоть до некоторого момента *t* **=** *Т* она летит в указанном направлении под действием силы тяги *F*. Затем двигатели отключаются (всё топливо сгорело), а ракета продолжает свой полет по инерции и приземляется на некотором расстоянии *L* от точки старта. Необходимо выбрать такой закон движения, при котором ракета улетит как можно дальше.

Уточним постановку данной задачи. Полет ракеты происходит в плоскости *х*, *у*, причем начало координат находится в точке старта, горизонтальная ось *х* направлена в сторону точки приземления, а вертикальная ось *у* – вверх (см. рис. 49). Задача состоит в отыскании такого закона изменения *u* **=** *u*(*t*) угла между направлением силы тяги и горизонтальной координатой на протяжении всего активного полета ракеты, т.е. при 0 **<** *t* **<** *T* , чтобы дальность ее полета *L* была максимальной. Изменение массы ракеты за счет сгорания топлива и сопротивление воздуха считаются достаточно малыми и не учитываются.



Рис. 49. Полет ракеты.

Сформулируем соответствующую задачу оптимального управления. Движение ракеты на интервале времени (0,*T*) , т.е. в ее активном полете характеризуется уравнениями

 ,

где *m* – масса ракеты, *Р* – ее вес, а *Fx* и *Fy* – горизонтальная и вертикальная составляющие силы тяги (см. рис. 49). Справедливы равенства

*Fx* = *F* cos *u* , *Fy* = *F* sin *u* , *P* = *mg* .

Тогда уравнения движения принимают вид

 , (11.3)

где *g* – ускорение свободного падения, а *а = F/m* – ускорение силы тяги, являющееся параметром процесса.

Известно, что при *t* **=** 0 ракета находится в начале координат и покоится. В этой связи начальные условия для системы (11.3) записываются следующим образом

 . (11.4)

Выбирая некоторую функцию *u* **=** *u*(*t*) и решая задачу Коши (11.3), (11.4), можно найти координаты и составляющие вектора скорости движущейся ракеты. Это позволяет определить характеристики ракеты в момент времени *t* **=** *T*  отключения двигателей:

 . (11.5)

После выключения двигателей при *t* **>** *T* ракета летит по инерции при постоянной действующей силе тяготения. Ее свободный полет описывается уравнениями:

 .

Общее решение последней системы имеет следующий вид:

*x*(*t*) = α1 *t* + β1 , *y*(*t*) = -*g t2*/2 + α2 *t* + β2 ,

где неизвестные константы α1 , β1 , α2 , β2 определяются с помощью соотношения (11.5). В результате находим значения

α1 = *uT* , β1 = *xT* – *uT T* , α2 = *vT* + *gT* , β2 = *yT* – *vTT* – *gT 2* /2.

Таким образом, движение ракеты в ее свободном полете характеризуется равенствами:

*x*(*t*) = *xT* + *uT* (*t* – *T*) , (11.6)

*y*(*t*) = *yT*+ *vT* (*t* – *T*) – *g* (*t* – *T*)2 / 2 . (11.7)

В момент *t* = τ приземления ракеты её вертикальная координата обращается в нуль. Полагая в равенстве (11.7) *t* = τ , получаем квадратное уравнение

*g* (τ – *T*) 2 / 2 – *vT* (τ –*T*) – *yT*= 0 .

Отсюда находим величину

 .

Поскольку момент приземления наступает после выключения двигателей, разность τ –*T* должна быть положительна. В этой связи в последнем соотношении следует выбрать знак "плюс" перед корнем.

Дальность полета ракеты *L* равна ее горизонтальной координате в момент приземления. Пользуясь формулой (11.6), найдем значение

*L* = *x*(τ) = *xT* + *uT* (τ – *T*) = *xT* + *uT* ** /** *g* .

Учитывая соотношения (11.5), заключаем, что, в том случае, когда функции *х* и *у* являются решениями задачи (11.3), (11.4) при данной функции *u* **=** *u*(*t*), дальность полета ракеты будет равна

*L*[*u*] = *x*(*T*) + **** .

Итак, мы получаем задачу оптимального управления, которая состоит в нахождении такой функции *u* **=** *u*(*t*) , которая в соответствии с соотношениями (11.3), (11.4) максимизирует функционал *L*.

Приведем ее к виду сформулированной ранее общей оптимизационной задачи. Прежде всего, отметим, что число управлений *r* в данном случае равно единице, т.е. функция *u* является скалярной. Зададим функции состояния

**.

При этом *n* **=** 4 , а компоненты вектор-функции *f* в уравнении (11.1) определяются следующим образом:

*f*1 = *х*3 , *f*2 = *x*4 , *f*3 = *a* cos *u* , *f*4 = *a* sin *u* – *g* .

Сравнивая начальные условия (11.2) и (11.4), заключаем, что *x*0 = 0 .

В виду отсутствия явных ограничений на управления под *U* будем понимать множество всех непрерывных функций на отрезке [0,*T*] (в действительности можно учитывать лишь те функции, значения которых лежат на отрезке [0,] ). Для определения функционала *I* отметим прежде всего, что максимуму длины *L* соответствует минимум величины **-***L*. Тогда для приведения функционала **-***L* к виду *I*достаточно задать функции

*f*0(*t*,*x*,*u*) = 0 , Ф(*x*) **=** -****  .

Итак, задача максимизации дальности полета ракеты приведена к указанной ранее стандартной форме. Для решения оптимизационной задачи можно воспользоваться, например, принципом максимума Понтрягина.

## 4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Рассмотрим сформулированную ранее общую задачу оптимального управления, определяемую системой дифференциальных уравнений (11.1). Определим функцию

 ,

где  = (*t*) = ((*t*), (*t*),*n*(*t*))– вектор-функция удовлетворяющая уравнениям

 (11.8)

с условиями

 , (11.9)

где *i* = 1 , ... , *n* . Система, описываемая соотношениями (11.8), (11.9), называется *сопряженной системой*, а ее решения – *множителями Лагранжа*.

При определенных ограничениях на уравнения состояния, множество допустимых управлений и критерий оптимальности в соответствии с*принципом максимума* решение задачи оптимального управления удовлетворяет условию

 . (11.10)

Поскольку явная зависимость функции *H* от управления известна,   
соотношение (11.10) представляет собой задачу на условный экстремум функции. В результате получаем задачу, включающую в себя уравнения состояния (11.1), (11.2), сопряженную систему (11.8), (11.9) и условия максимума (11.10).

Воспользуемся принципом максимума для решения задачи максимизации дальности полета ракеты. В данном случае функция *Н* имеет следующий вид:

*H =* 1 *x*3 + 2 *x*4 + 3 *a* cos *u* + 4 (*a* sin *u* – *g*) .

Установим сопряженные уравнения (11.8)

. (11.11)

Краевые условия (11.9) для нее принимают вид

 . (1.12)

Для формулировки условия максимума зададим функцию

*F*(*u*) = *a* (3 cos *u* + 4 sin *u* ) ,

включающую в себя только те слагаемые в определении функции *Н*, которые зависят явным образом от управления. Тогда соотношение (11.10) соответствует безусловному максимуму функции *F*, поскольку оставшиеся слагаемые войдут как в левую, так и в правую часть равенства (11.10). Приравнивая нулю производную функции *F*, будем иметь

*F* '(*u*) = *a* (4 cos *u* – 3 sin *u* ) = 0 .

Полученное выражение представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно управления *u*. Решая его, находим величину

 . (11.13)

Итак, для нахождения оптимального управления достаточно   
определить функции 3 и 4 . Как видно из последних двух уравнений (11.11), они зависят от 1 и 2 , которые согласно первым двум уравнениям постоянны. Пользуясь условиями (11.12) находим значения

.

Решая задачу Коши (11.11), (11.12), определяем функцию



Аналогичным образом находится величина



Теперь вычисляем отношение

 . (11.14)

Пользуясь равенствами (11.13), (11.14), приходим к далеко не тривиальному выводу о том, что оптимальное управление *u* не зависит от времени. Для его окончательного нахождения требуется определить значения функций *x*2 , *x*3 , *x*4  в конечный момент времени.

Решая задачу Коши (11.3), (11.4) в случае постоянства управления, получаем:

Тогда, пользуясь равенствами (11.13), (11.14), приходим к соотношению

 .

Возводя левую и правую часть последнего равенства в квадрат и   
выражая косинус через синус, будем иметь

*g* sin3 *u* – 2 *a* sin2 *u* + *a* = 0 .

Введем обозначение

*v* = sin*u* , *b* = *a*/*g* .

Тогда получаем кубическое уравнение

ϕ(*v*) = *v*3 – 2 *b v*2 + *b* = 0 . (11.15)

Итак, оптимальное управление определяется исключительно ускорением силы тяги, а точнее, его отношением *b* к ускорению свободного падения.

Отметим, что для успешного старта ракеты необходимо, чтобы его начальное ускорение было положительным. Исходя из второго уравнения (11.3) находим величину

 .

Очевидно, для положительности ускорения должно по крайней мере выполняться неравенство *a* > *g* , а значит, *b* > 1 .

Найдем производную

ϕ'(*v*) = 3 *v*2 – 4 *b v*.

Обращая ее в нуль, установим, что функция ϕ имеет два локальных экстремума. В частности, при *v* = 0 достигается локальный максимум, а при *v* = 4/3 *b* – локальный минимум (cм. рис. 50).



Рис. 50. График функции ϕ = ϕ(*b*) .

Справедливы соотношения

.

Таким образом, уравнение (11.15) имеет три корня, один из которых отрицателен, второй принадлежит интервалу (0,4/3*b*) , а третий – превосходит значение 4/3*b* (см. рис. 50).

Отметим, что величина *v*, будучи синусом, не может по модулю превосходить единицы. Более того, поскольку запуск ракеты осуществляется в направлении возрастания горизонтальной координаты, угол *u*, а значит, и его синус *v* должны быть положительными. Таким образом, нас могут интересовать лишь те значения параметра *v*, которые принадлежат единичному интервалу. Естественно, минимальный и максимальный корни уравнения (11.15) этому условию не удовлетворяют.

Учитывая соотношения

ϕ(0) = *b* > 0 , ϕ(1) = 1 – *b* < 0 ,

óстановим, что на интервале (0,1) функция ϕ меняет знак. Тогда уравнение (11.15) имеет единственное решение *v*\* = *v*\*(*а*) из этого интервала. В результате заключаем, что решение задачи максимизации дальности полета ракеты определяется по формуле

*u*(*t*) = arcsin *v*\* , *t* ∈(0,*Т*) .

Итак, оптимальное управление единственно, является постоянным и зависит от исключительно ускорения силы тяги *а*. Его конкретное значение может быть найдено приближенно с помощью какого-либо итерационного алгоритма для уравнения (11.15).

#### **Компьютерный эксперимент. Максимизация дальности полета ракеты.**

Обратиться к лабораторной работе "*Максимизация дальности полета ракеты*" обучающего программного комплекса "*Математические модели естествознания*". Провести следующий анализ

1. Убедиться в том, что оптимальный угол запуска ракеты не меняется со временем, причем отличается от 45о.

2. Провести расчеты для различных значений ускорения силы тяги. Построить график зависимости оптимального управления от ускорения силы тяги.

3. Убедиться в том, что оптимальный угол не зависит от времени отключения двигателей.

## 5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Зная законы физики, химии и других частных наук, можно, в принципе, установить математические модели исследуемых процессов. Эти модели позволяют определить характер зависимости функций состояния системы от соответствующих аргументов при заданных значениях имеющихся параметров процесса. Естественно, для использования на практике математических моделей необходимо непременно знать параметры системы. Подобные величины обычно характеризуют конкретные условия протекания рассматриваемого явления, свойства имеющегося материала или окружающей среды и т.д. Эта информация, как правило, устанавливается экспериментально.

К сожалению, некоторые входные параметры бывает затруднительно измерить непосредственно. В этом случае часто приходится довольствоваться той информацией о процессе, которую всё же удается получить. Возникает вопрос, каким образом можно воспользоваться имеющейся информацией о процессе с тем, чтобы восполнить недостаток сведений о параметрах модели. В этом и состоит смысл идентификации математических моделей.

В общем случае математическую модель исследуемого процесса можно записать в виде операторного уравнения состояния

*A*(*u*) *х* = 0 , (11.16)

где *х* – функция состояния системы, *u* – параметр процесса, *A* = *A*(*u*) – оператор состояния. Отметим, что соотношение (11.16) может оказаться как отдельным уравнением, так и системой уравнений, величина *u* может быть и вектор-функцией, а *v* – числом, вектором, вектор-функцией и т.д. Все рассмотренные ранее математические модели (а также те, которые будут описаны в последующих лекциях) можно записать в форме (11.16).

Математическая модель процесса выводится на основе тех или иных закономерностей, выявляемых с помощью законов физики, химии, экономики и т.д. В то же время конкретные значения параметров системы характеризуют действия соответствующих законов конкретно в данных условиях и обычно определяются экспериментально. К сожалению, многие параметры практически не поддаются непосредственному экспериментальному измерению. Их определяют обычно косвенно – на основе измерения функции состояния системы. Таким образом, для нахождения параметров процесса используются имеющиеся сведения о функции состояния на некоторой части области протекания процесса, на ее границах, в конкретных точках, в определенные моменты времени и т.п.

В общем случае имеющуюся экспериментальную информацию можно охарактеризовать с помощью уравнения измерения

*В* *х* = *z* , (11.17)

где *z* – результаты измерения (число, вектор, функция и т.п.), а   
*В* – *оператор измерения*. Можно поставить задачу определения такого параметра *u*, чтобы соответствующее ему решение *х* уравнения (11.16) удовлетворяло условию (11.17). Задачу восстановления параметров системы по результатам измерения функции состояния называют   
*обратной задачей*. Проблема повышения степени адекватности   
математической модели исследуемому явлению (в частности, за   
счет надлежащего подбора параметров процесса) относится к теории *идентификации* математических моделей или систем.

Наиболее естественный способ решения задачи идентификации предполагает ее сведение к некоторой оптимизационной задаче. При этом роль управления играет идентифицируемый параметр, а минимизируемый функционал записывается в виде в виде значение

*I* = *I*(*u*) = || *B* *х*(*u*) – *z* || 2 ,

где *х*(*u*) – решение уравнения (11.16), соответствующее параметру *u*. Функционал *I* называется *невязкой*, а значение *I*(*u*) выражает квадрат нормы отклонения наблюдаемой величины *Bх*(*u*), получаемой в результате решения уравнения состояния при данном значении параметра, от известных экспериментальных данных *z*.

Очевидно, если для некоторого значения параметра *u* решение уравнения (11.16) удовлетворяет соотношению (11.17), то невязка будет равна нулю (норма нулевого элемента равна нулю). Тогда в силу неотрицательности нормы заключаем, что данное значение параметра *u* минимизирует невязку. Предположим теперь, что на некотором "управлении" *u* достигается минимальное значение невязки. Оно заведомо не может оказаться отрицательным в силу свойств нормы. Если же это значение равно нулю, то (исходя из определения нормы) должно выполняться равенство (11.17). Тем самым определяется искомое значение идентифицируемого параметра. Наконец, в том случае, когда минимум невязки оказывается положительным, задача идентификации в принципе не имеет решения (норма обращается в нуль исключительно на нулевом элементе). Таким образом, заключаем, что решение задачи идентификации наверняка минимизирует невязку, а точка минимума невязки оказывается решением задачи идентификации, если таковое вообще существует. В этой связи для практического решения поставленной задачи идентификации можно перейти к минимизации невязки. Соответствующая экстремальная задача решается с помощью различных методов оптимизации.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В различных прикладных задачах управления встречаются задачи о переводе системы из одного известного состояния в другое за минимальное время. Мы рассмотрим простейшую задачу такой природы.

### **1. Задача оптимального быстродействия.**

Рассматривается тело, движущееся под действием некоторой силы. Процесс движения описывается уравнением

 .

Необходимо подобрать управление *u* = *u*(*t*) (ускорение силы тяги), удовлетворяющее условию

| *u*(*t*) | ≤ 1 ,

таким образом, чтобы перевести тело из начального состояния

*х*(0) = *а* , 

в положение равновесия (начало координат)

*х*(*Т*) = 0 , 

за минимальное время *Т*.

#### **Компьютерный эксперимент. Задача оптимального быстродействия.**

Обратиться к лабораторной работе "*Задача оптимального быстродействия*" обучающего программного комплекса "*Математические модели естествознания*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты для значений *а* = 8 , *v* = -4 , взяв сто точек по   
времени. Убедиться в том, что система выходит в положение равновесия при постоянном значении управления.

2. Задавая значения начальной скорости последовательно *v* = -2 , *v* = 2 и *v* = - 4 , убедиться в том, что оптимальное управление оказывается кусочно постоянной функцией с одной точкой разрыва.

## КОММЕНТАРИИ к лекциям 10 – 11

Наряду с принципом наименьшего действия в механике используются также принцип возможных перемещений, принцип наименьшего принуждения, принцип наименьшей кривизны и др. Вариационные принципы механики устанавливают свойства, позволяющие отличить истинное движение объекта от других возможных его состояний. Помимо классической механики вариационные принцип используются также в электродинамике, оптике, квантовой механике, теории относительности и др. С вариационными принципами механики можно познакомиться, например, в монографиях Н. Н. Бухгольца [15],   
Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [60], К.Ланцоша [65].

Основы вариационного исчисления излагаются, например, в   
книгах Г. А. Блисса [13] , М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника [56] и   
Л. Э. Эльсгольца [151], Л. Янга [155], а теория оптимального управления – у   
В. И. Алексеева, В. М. Тихомирова и С. В. Фомина [2], А. Д. Иоффе А.Д. и   
В. М. Тихомирова [39].

Методы приближенного решения экстремальных задач приводятся,   
например, в книгах Н. Н. Моисеева [94], Э. Полака [106], Ж. Сеа [119],   
Р.П. Федоренко [133], методы приближенного интегрирования – у Н. С. Бахвалова [8], И. С. Березина и Н. П. Жидкова [10], В. И. Крылова [53], С.М. Никольского [99], а приближенные методы решения алгебраических уравнений – в книгах Н. С. Бахвалова [8], И. С. Березина и Н. П. Жидкова [10].

В функциональном анализе вместо вариации функционала используется термин *производная Гато* (см., например, В. Хатсон, Дж. Пим [141]). Условие равенства нулю в точке экстремума вариации функционала является естественным обобщением необходимого условия экстремума функции в точке – обращение в нуль ее производной в этой точке.

Введенное понятие вариации траектории более точно называют локальной вариацией. Существуют и другие типы вариаций функций, среди которых отметим *игольчатую вариацию*, широко используемую, в частности, в теории оптимального управления [2]. Она предполагает возмущение функции лишь в малой области, но на произвольную величину.

Уравнение Эйлера представляет собой лишь необходимые, но, вообще говоря, не достаточные условия экстремума. Это означает, что не всякое решение уравнения Эйлера соответствует экстремуму функционала. То же самое относится и к принципу максимума. Существуют и другие формы условий экстремума вариационного экстремума (см., например, Г. А. Блисс [13]).

Основной лемме вариационного исчисления в функциональном анализе соответствует следующий результат: если значение некоторого линейного непрерывного функционала на произвольном элементе пространства равно нулю, то сам функционал равен нулю (см., например, В. Хатсон, Дж. Пим [141]).

Задача о брахистохроне исследуется, например, в книгах В. И. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. В. Фомина [2], Г. А. Блисса [13], Л. Э. Эльсгольца [151]. С ней связано становление вариационного исчисления, как самостоятельного математического раздела. Необходимым условием экстремума   
для полученной задачи о брахистохроне будет некоторое дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение Эйлера) с соответствующими граничными условиями. Таким образом, в конечном итоге предстоит решить краевую задачу для дифференциального уравнения.

Задача максимизации дальности полета ракеты взята из книги   
С. Лоудена [71].

Методы идентификации описываются, например, в книге Д. Гропа [26]. В лекции № 14 будут поставлены задачи идентификации, связанные с обратной задачей теплопроводности.

# Лекция № 12 КОЛЕБАНИЕ СТРУНЫ

*Физика в наше время слишком важна*, *чтобы оставлять ее физикам*.

Давид ГИЛЬБЕРТ

Данная лекция открывает вторую часть курса, в которой рассматриваются *системы с распределенными параметрами*. Здесь исследуются объекты, которые обладают некоторыми пространственными размерами. Тем самым в качестве независимых переменных выбирается не только время, но также одна или несколько пространственных координат.

Рассматриваются колебания струны, являющейся распределенным аналогом пружины. Исходя из закона сохранения импульса, выводится уравнение колебания струны, представляющее собой уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Показывается, что его решение удовлетворяет закону сохранения энергии.

Приводятся решения задачи Коши и первой краевой задачи для уравнения колебания струны. Для решения задачи Коши уравнение предварительно приводится к каноническому виду. Получаемая в результате формула Д'Аламбера описывает, в частности, распространение бегущих волн. Первая краевая задача описывает периодические колебания струны с закрепленными концами.

В приложении рассматривается уравнение четвертого порядка, описывающее колебание упругой балки.

## 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Естественным обобщением колебания пружины (см. лекция   
№ 2) служит процесс колебания струны – объекта, обладающего некоторыми размерами. Предположим, что струна является достаточно длинной и тонкой. Тогда ее можно считать пространственно одномерной и учитывать изменение всех характеристик лишь по длине струны. При этом независимыми переменными будут время *t* и пространственная переменная *х*, направленная вдоль струны. Таким образом, в отличие от рассмотренных ранее механических (и не только механических) объектов, струну уже нельзя квалифицировать как материальную точку, а ее математическая модель не может быть сведена к системе конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы ограничимся рассмотрением лишь поперечных колебаний струны, которые направлены перпендикулярно оси *х*. Функцией   
состояния системы здесь будет отклонение *u* струны от оси *х*. Система координат выбирается таким образом, чтобы в том случае, когда струна находится непосредственно на оси *х* (т.е. при *u =* 0) и покоится, колебания не возникают. Тем самым нулевое значение функции состояния системы соответствует положению равновесия. Таким образом, величина *u*(*x*,*t*) выражает отклонение струны в точке *х* в момент времени *t* от положения равновесия (см. рис. 51).

Уравнение движения струны (как и уравнения движения материальной точки) выводится на основе закона сохранения импульса. Импульс тела массой *m*, движущегося со скоростью *v* равен произведению

*р* = *m* *v* .

Масса однородной струны длиной*X* определяется по формуле

*m* = ρ *X* ,

где ρ – линейная плотность, т.е. количество вещества, приходящееся на единицу длины. Использование линейной, а не обычной плотности (количество вещества в единице объема) объясняется тем, что в данной модели струна имеет лишь длину, но не объем. Плотность определяется материалом, из которого состоит струна, и является параметром задачи. Итак, импульс струны равен

*p* = ρ *v X* . (12.1)

В этой формуле скорость считается постоянной. В действительности же величина *v* представляет собой скорость изменения функции   
состояния *u*, т.е. связана с положением струны равенством

 .



Рис. 51. Поперечные колебания струны.

Натяжение *k* направлено по касательной к профилю струны.

Отклонение *u* зависит и от переменной *х*. Более того, в том случае, когда струна не однородна по своей структуре, плотность также является переменной величиной. Тогда равенство (12.1) сохраняет смысл только в том случае, когда рассматривается участок струны сколь угодно малой длины *dx* (можно пренебречь изменением каких-либо характеристик на достаточно малом участке). Соответствующее значение импульса равно

*dp* = ρ *ut* *dx* .

Рассмотрим некоторый протяженный участок струны от точки *х* до   
*x* + Δ*x* . Его импульс находится в результате интегрирования последнего соотношения

 .

Если характеристики струны не меняются по ее длине, то (при Δ*x = X*) полученное равенство приводится к виду (12.1).

Для вывода уравнения колебания струны найдем изменение   
импульса на данном участке за время от *t* до *t* + Δ*t* . Очевидно, импульс *p* зависит от времени. Тогда искомое изменение импульса равно

 , (12.2)

т.е. представляет собой разность между значениями в соответствующие моменты времени.

Для формулировки закона сохранения необходимо установить причину, вызвавшую изменение импульса. Если на тело действует   
постоянная сила *F*, то за время *Т* она сообщает ему импульс

*p* = *F T* .

В случае переменной силы это равенство имеет смысл лишь на бесконечно малом интервале времени *dt*. Ему соответствует значение   
импульса

*dp* = *F dt*.

Тогда за время от *t* до *t* **+** Δ*t* получаем импульс

 .

Для преобразования этого равенства необходимо определить значение входящей в него силы *F*. Будем полагать, что единственная действующая на струну сила обусловлена ее натяжением. Предположим, что струна является достаточно гибкой, т.е. не сопротивляется изгибу. Тогда сила ее натяжения (или просто, *натяжение*) *k* направлена по касательной к профилю струны (см. рис. 51). В случае малых колебаний натяжение *k* постоянно и может считаться параметром процесса.

Поскольку мы учитываем лишь поперечные колебания струны, в выражение для импульса должно войти не само натяжение, а его проекция на ось *u*. В результате получаем равенство:

*F* = *k* sin α ,

где α – угол наклона касательной к профилю струны в данной точке.

Мы ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний струны. Известно, что синус малого угла достаточно близок к его тангенсу. Однако, тангенс угла наклона касательной к кривой, характеризующей зависимость функции *u* от аргумента *х*, равен производной *ux* = ∂*u*/∂*х* . В результате с достаточно большой точностью выполняется равенство

*F*  = *k* tgα = *k* *ux*.

Нас интересует изменение импульса на отрезке [*x*,*x*+Δ*x*] под   
действием сил натяжения. Тогда искомая сила *F* равна разности сил *F*1 и *F*2 на концах рассматриваемого участка (см. рис. 52). Таким образом, находим значение силы

 .

Следовательно, изменение импульса рассматриваемого участка струны на данном интервале времени равно

 . (12.3)

Согласно закону сохранения импульса справедливо равенство   
*p*1 = *p*2 (импульс меняется исключительно под действием сил натяжения). Тогда, пользуясь условиями (12.2), (12.3), будем иметь

.



Рис. 52. Действие сил натяжения на отрезке [*x*, *x*+Δ*x*] .



Рис. 53. Иллюстрация теоремы о среднем.

Полученное выражение преобразуется в соответствии с теоремой о среднем, согласно которой значение интеграла равно произведению подынтегрального выражения в некоторой точке интервала   
интегрирования на длину этого интервала (см. рис. 53). В результате установим равенство



где *x*\*∈[*x*, *x*+Δ*x*] , *t*\*∈[*t*, *t*+Δ*t*] . После деления на произведение Δ*x*Δ*t*  будем иметь

 .

Переходя к пределу при Δ*t* → 0 , Δ*x* → 0 ,получаем выражение

 , (12.4)

называемое *уравнением колебания струны*. Если струна является   
однородной, т.е. ее плотность постоянна, то соотношение (12.4) принимает вид

*utt* = *a*2 *uxx* ,

где

 .

Уравнение колебания струны является естественным обобщением уравнения колебания пружины (материальной точки) на случай распределенного одномерного объекта. Двумерный случай соответствует колебанию мембраны – некоторой плоской пленки. При этом   
функция состояния *u* **=** *u*(*x*,*y*,*t*) выражает отклонение мембраны в точке с координатами *x*, *y* от положения равновесия в момент времени *t*. Она характеризуется *уравнением колебания мембраны*

*utt* = *a*2 (*uxx* + *uyy*) ,

которое описывает, в частности, распространение волн на поверхности жидкости. Процесс распространения волн в пространстве связан с функцией четырех переменных *u* **=** *u*(*x*,*y*,*z*,*t*) и описывается соотношением

*utt* = *a*2 (*uxx* + *uyy* + *uzz* ) ,

называемым *волновым уравнением*. Сумму вторых производных по пространственным переменным принято называть *оператором Лапласа* и обозначать через Δ. Тогда волновое уравнение записывается в виде

*utt* = *a*2 Δ *u* .

Отсюда в одномерном случае следует уравнение колебания струны, а в двумерном – уравнение колебания мембраны.

## 2. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Полученные соотношения представляют собой *дифференциальные уравнения в частных производных*, поскольку неизвестная функция входит в уравнение вмести со своими производными по нескольким независимым переменным. Для достижения единственности   
решения задачи необходимо задать некоторые дополнительные   
условия (подобно тому, как уравнения движения материальной точки пополняются начальными условиями). Предположим, что струна   
имеет длину *X*, причем, ее левый конец соответствует точке *х* **=** 0 , а правый – точке *х* **=** *X*.

Уравнение колебания струны имеет второй порядок по времени и требует задания двух *начальных условий*.Будем полагать, что в начальный момент времени *t* = 0 известны начальный профиль струны   
 ϕ = ϕ(*x*) и распределение скорости ψ = ψ(*x*) по ее длине. Таким   
образом, справедливы равенства

*u*(*x*,0) = ϕ(*x*) , *ut*(*x*,0) = ψ(*x*) . (12.5)

Исследуемое уравнение имеет второй порядок и по пространственной переменной. В этой связи должны быть заданы два дополнительных условия на концах струны – *граничные условия*. Задача будет математически корректной только в том случае, когда на каждом   
конце струны задано по одному условию.

В точке *х* = 0 может быть задано *условие первого рода*

*u*(0,*t*) = α1(*t*) ,

согласно которому левый конец струны движется по известному законуα1 = α1(*t*) . В частности, при α1 = 0 он жестко закреплен в положении равновесия. Возможно также *условие второго рода*

*k* *ux*(0,*t*) = β1(*t*) ,

в соответствие с которым на левом конце задана сила натяжения β1 .При β1 = 0 натяжение отсутствует, т.е. конец является свободным.

Встречаются и другие типы граничных условий. Однако важнейшими являются приведенные выше. Аналогичные условия могут быть заданы и в точке *х* **=** *X* . В зависимости от характера исследуемого явления возможны различные сочетания условий на концах струны. В простейших случаях рассматриваются оба условия первого рода   
(известны законы движения концов струны)

*u*(0,*t*) = α1(*t*) , *u*(*X*,*t*) = α2(*t*) , (12.6)

либо оба условия второго рода (известны силы, действующие на   
концах)

*k* *ux*(0,*t*) = β1(*t*) , *k* *ux*(*X*,*t*) = β2(*t*) . (12.7)

Уравнение колебания струны с начальными условиями (12.5)   
и граничными условиями (12.6) составляют *первую краевую задачу* для исследуемого уравнения. При замене соотношений (12.6) на (12.7)   
получаем *вторую краевую задачу*. Обе эти задачи считаются *неоднородными*. Если выражения в правых частях граничных условий равны   
нулю, то получаем *однородные* краевые задачи. При этом граничные   
условия

*u*(0,*t*) = 0 , *u*(*X*,*t*) = 0

соответствуют закрепленным концам струны, а соотношения

*ux*(0,*t*) = 0 , *ux*(*X*,*t*) = 0

свободным концам струны.

Особая задача возникает в том случае, когда струна является столь длинной, что ее можно считать бесконечной. Тогда граница   
области вообще отсутствует и не совсем ясно, где следует задавать дополнительные условия по пространственной переменной. Однако оказывается, что в этом случае граничные условия вообще не нужны. Уравнение колебания бесконечной струны с начальными условиями (12.5) составляют *задачу Коши* для данного уравнения.

## 3. ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Процесс колебания маятника и пружина можно было охарактеризовать и с помощью закона сохранения энергии. Аналогичные результаты применимы и в данном случае. Определим энергию колебания струны. Она складывается из кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия струны зависит от скорости ее движения и равна

**** .

Учитывая, что масса однородной струны длиной *X* равна ρ*X*, получаем

**** .

Эта формула предполагает неизменность характеристик струны по ее длине. В действительности такое равенство может выполняться лишь на сколь угодно малом участке длины *dx*, что приводит нас к соотношению

**** .

Тогда кинетическая энергия струны длиной *X* равна интегралу

**** .

Если в фиксированный момент времени *t* струна имеет некоторый профиль *u* = *u*(*x*,*t*) , то соответствующая потенциальная энергия с точностью до знака совпадает с работой, которую нужно совершить, чтобы вывести струну из положения равновесия при *t* = 0 в состояние *u*(*x*,*t*) за время *t*. Работа равна действующей силе, умноженной   
на пройденный путь, который, в свою очередь, равен произведению скорости на время движения. Если под действием силы *F* за время *Т* струна двигалась со скоростью *ut*, то при этом была выполнена работа

*A* = *F* *ut**T* .

Учитывая представление силы *F*, находим значение работы

.

Эта формула будет иметь смысл в том случае, когда она относится к сколь угодно малым интервалам *dx* и *dt*. При этом находим работу

*d A* = *k* *uxx* *ut**dx* *dt* .

Тогда при перемещении струны длиной *X* за время *t* выполняется   
работа

 .

Предположим для простоты, что концы струны жестко закреплены. Дифференцируя по времени соответствующие граничные   
условия, будем иметь

*ut*(0,*t*) = 0 , *ut*(*X*,*t*) = 0 .

Тогда, выполняя в предшествующем равенстве интегрирование по   
частям, находим значение

 .

Преобразуем подынтегральное уравнение с помощью равенства

 .

Заключаем, что работа, затраченная на вывод системы из положения равновесия в начальный момент времени в некоторое текущее состояние, равна

 .

Учитывая, что при *t* = 0 струна находилась в положении равновесия, установим, что *ux*(*x*,0) = 0 . Таким образом, потенциальная энергия, отличающаяся от работы только знаком, равна

.

В результате находим энергию колебания струны

.

Установим связь между уравнением колебания струны и полученным выражением для ее энергии. Умножая уравнение колебания струны (12.4) на производную *ut* и интегрируя по длине струны, установим соотношение

. (12.8)

Имея выражение для кинетической энергии, получаем равенство

.

Выполняя интегрирование по частям, будем иметь



В результате равенство (12.8) принимает вид

****,

откуда следует соотношение

*E*(*t*) = const .

Полученный результат соответствует *закону сохранения энергии*колебания струны, обобщающему аналогичный результат для пружины (или маятника).

В дальнейшем будет дано решение задачи Коши и первой   
краевой задачи для уравнения колебания струны.

## 4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Рассмотрим однородную струну бесконечной длины. Ее движение описывается уравнением

*utt* = *a*2 *uxx* , (12.9)

с начальными условиями

*u*(*x*,0) = ϕ(*x*) , *ut*(*x*,0) = ψ(*x*) , (12.10)

где параметр *а*, начальный профиль струны ϕ и начальная скорость ψ считаются известными.

Для решения исследуемой задачи Коши перейдем от естественных независимых переменных *х*, *t* к новым переменным

ξ = *x* + *at* , η = *x* – *at* .

которые называются *характеристическими*. Запишем уравнение колебания струны в характеристических переменных. Введем новую функцию состояния *v* следующим образом:

*v*(ξ,η) = *u*(*x*,*t*) .

Пользуясь теоремой о дифференцировании сложной функции, найдем производные

*ux* = *vx*= *v*ξ ξ *x* + *v*η η *x* = *v*ξ  + *v*η  ,

*ut* = *vt*= *v*ξ ξ *t* + *v*η η *t* = *a* (*v*ξ  – *v*η).

Определим вторую производную

*uxx* = (*ux*)*x*= (*v*ξ  + *v*η)*x* = *v*ξξ ξ*x* + *v*ξη η *x* + *v*ηξ ξ*x* + *v*ηη η *x* ,

Учитывая равенство смешанных производных *v*ξη и *v*ηξ , будем иметь

*uxx* = *v*ξξ + 2 *v*ξη + *v*ηη ,

Аналогичным образом определяется вторая производная

*utt* = (*ut*)*t*= *a*2 ( *v*ξξ ξ*t*  + *v*ξη η *t* – *v*ηξ ξ*t* – *v*ηη η *t* ) .

Подставляя значения вторых производных в соотношение (12.9),   
получаем

*a*2 ( *v*ξξ  + 2 *v*ξη + *v*ηη ) = *a*2 ( *v*ξξ – 2 *v*ξη + *v*ηη ) .

Таким образом, справедливо равенство

*v*ξη = 0 , (12.11)

которое соответствует*каноническому виду* уравнения колебания   
струны.

Рассмотрим соотношение (12.11). Равенство



означает, что выражение в круглых скобках не зависит от переменной ξ. Однако оно может оказаться функцией другой переменной η. Таким образом, в результате интегрирования соотношения (12.11) по переменной ξ установим справедливость равенства

*v*η(ξ,η) = *f*(η)

для любой функции *f*.

Проинтегрируем полученное выражение по переменной η.   
В результате будем иметь

**** .

Здесь величина *f*1 не зависит от η , но может оказаться функцией   
переменной ξ. Вводя обозначение

****,

определим функцию

*v*(ξ,η) = *f*1(ξ) + *f*2(η) . (12.12)

Итак, решение уравнения (12.10) определяется с точностью до двух произвольных функций. Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат не покажется столь удивительным, если вспомнить, что решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка находится с точностью до двух произвольных постоянных, т.е. величин, не зависящих от данного аргумента. В частности, решением уравнения



будет не только любая константа, но и произвольная функция единственной переменной *х*.

Функция *v*, определенная по формуле (12.12), называется   
*общим решением* уравнения (12.11). Тогда общее решение уравнения (12.9) определяется по формуле

*u*(*x*,*t*) = *f*1(*x* + *at*) + *f*2(*x* – *at*) . (12.13)

При его построении мы пользовались достаточно распространенным приемом. Сначала выполняется такая замена переменных, при которых исследуемая задача принимает достаточно простой вид. Затем проводится решение задачи в новых переменных. Наконец, на последнем этапе осуществляется возвращение к исходным переменным.

Нас интересует не общее решение уравнения колебания струны, а его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. В этой связи подберем входящие в формулу (12.13) функции *f*1 и*f*2 таким   
образом, чтобы обеспечить справедливость соотношений (12.10). В   
результате получаем равенства

*f*1(*x*) + *f*2(*x*) = ϕ(*x*) , (12.14)

**** ,(12.15)

где– производные соответствующих функций одной переменной.

Проинтегрируем равенство (12.15) от некоторого фиксированного *x*0 до произвольного значения *х*. Получаем соотношение

 (12.16)

где *с* – произвольная постоянная.

Соотношения (12.14), (12.16) представляют собой систему   
линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных *f*1(*х*)и*f*2(*х*) . Решая эту систему, находим значения

 ,

 .

Отметим, что искомые функции *f*1 и*f*2 определяются с точностью   
до двух постоянных *x*0 и *с*, что как будто предвещает определенные   
неприятности.

Подставим найденные значения функций в равенство (12.13). Получаем

Отрадным здесь оказывается тот факт, что неопределенные параметры *x*0 и *с* в процессе преобразований сократились. Таким образом, мы   
находим единственное решение задачи Коши (12.9), (12.10)



Полученное соотношение называется *формулой Д'Аламбера*.

Рассмотрим частный случай задачи (12.9), (12.10). Предположим, что в начальный момент времени струна имеет профиль ϕ = ϕ(*x*), изображенный на рис. 54, и покоится, т.е. имеет нулевую начальную скорость. Тогда в соответствии с формулой Д'Аламбера решение   
задачи будет иметь вид

.

Таким образом, положение струны в момент времени *t* складывается из величин, определяемых двумя слагаемыми в правой части последнего равенства. Первой из них соответствует функция ϕ = ϕ(*x*) сдвинутая влево по оси абсцисс на величину *at* и сжатую вдвое по оси   
ординат. Второе слагаемое отличается от первого лишь направлением сдвига.



Рис. 54. Начальный профиль струны.

На рис. 55 изображаются профили струны в разные моменты времени с шагом ¼ *а* . Как видно из графиков, положение струны определяется суперпозицией двух полуволн, которые постепенно разбегаются в разные стороны. Наблюдаемое явление называется *бегущей волной*. Отметим, что чем больше значение параметра *а*, тем быстрее распространяется фронт волны. Как видно из уравнения (12.9) коэффициент *а* действительно имеет размерность скорости. Его называют скоростью бегущей волны.

Бегущие волны можно наблюдать на поверхности воды при   
падении в нее какого-либо тела (например, камня). Волны на поверхности воды характеризуются двумерным аналогом уравнения колебания струны, т.е. уравнением колебания мембраны. Однако если   
наблюдать за уровнем воды в вертикальной плоскости с началом   
координат, соответствующим точке падения тела в воду, то мы увидим бегущие волны, аналогичные изображенным на рис. 55.

#### **Компьютерный эксперимент. Бегущие волны.**

Обратиться к лабораторной работе "*Поперечные колебания струны.   
Бегущие волны*" обучающего программного комплекса "*Математические   
модели естествознания*". Провести следующий анализ:

1. Задавая начальное положение струны, аналогичное изображенному   
на рис. 54, обнаружить бегущие волны. Обратить внимание на изменение   
скорости струны во времени и в пространстве.

2. Меняя значения коэффициента *а*, обнаружить ускорение и замедление движения бегущей волны.

3. Провести расчеты с другими вариантами начальных состояний   
системы из числа имеющихся в системе.



Рис. 55. Профили струны в разные моменты времени.

Волны распространяются со скоростью *а*.

## 5. КОЛЕБАНИЕ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

Рассмотрим однородную струну длиной *X* = π . Ее движение описывается уравнением

*utt* = *a*2 *uxx* , 0 < *x* < π , *t* > 0 . (12.17)

Предположим, что в начальный момент времени струна имеет синусоидальный профиль и покоится. Тогда справедливы следующие начальные условия

*u*(*x*,0) = sin *x* , *ut*(*x*,0) = 0 , 0 < *x* < π . (12.18)

Концы струны считаются жестко закрепленными в положении равновесия, т.е. выполнены равенства

*u*(0,*t*) = 0 , *u*(π,*t*) = 0 , *t* > 0 . (12.19)

Для решения однородной первой краевой задачи (12.17) – (12.19) можно воспользоваться, например, методом разделения переменных (методом Фурье), изложение которого лежит за пределами настоящего курса. При этом решение задачи определяется по формуле

*u*(*x*,*t*) = cos *at* sin *x* .

Подставляя это значение в соотношения (12.17) – (12.19), убеждаемся, что определенная таким образом функция *u* действительно является решением задачи.

На рис. 56 изображены профили скорости, а также ее скорость

*v*(*x*,*t*) = *ut*(*x*,*t*) = - *a* sin *at* sin *x* .

в различные моменты времени. Графики этих функций приводятся с шагом по времени *t* = ¼ π/a.

Проанализируем полученные результаты. Мы рассматриваем свободные колебания струны. Концы струны жестко закреплены. В начальный момент времени струна выведена из положения равновесия и покоится. Имея соответствующее отклонение от положения равновесия, струна обладает определенной потенциальной энергией, действие которой всегда направлено в сторону равновесия. При этом   
кинетическая энергия отсутствует, поскольку струна покоится. За счет потенциальной энергии струна начинает двигаться в сторону равновесия. По мере ее приближения к равновесному состоянию уменьшается потенциальная энергия струны. Однако сам факт движения свидетельствует о появлении некоторой скорости, и значит, кинетической энергии. В соответствии с законом сохранения энергии полная механическая энергия системы не меняется. Таким образом, уменьшение   
потенциальной энергии сопровождается соответствующим увеличением ее кинетической энергии. Тем самым, приближаясь к положению равновесия, струна движется с положительным ускорением.



Рис. 56. Положение струны и ее скорость в различные моменты времени.

В момент времени *t* **=** ½ π**/***a* струна достигает равновесного   
состояния. Это означает, что ее потенциальная энергия равна нулю.   
Тогда полная энергия струны совпадает с ее кинетической энергией, которая в данном случае достигает своего максимума. Это возможно, если скорость также оказывается максимальной по модулю. Отметим, однако, что в данном случае скорость струны является отрицательной.

Имея достаточно большую кинетическую энергию, струна по инерции продолжает свое движение и начинает отклоняться от положения равновесия (на рис. 56 мы наблюдаем движение струны вниз). По мере отклонения струны от равновесного состояния появляется и возрастает потенциальная энергия, действие которой направлено в сторону равновесия, а значит, против движения. В результате движение струны замедляется, ее кинетическая энергия падает, а потенциальная – растет. В момент времени *t* **=** π**/***a*  скорость струны достигает нулевого значения. При этом кинетическая энергия также равна нулю, а потенциальная достигает максимума. В результате струна начинает двигаться в противоположном направлении. При *t* **=** 3π/2*a* она достигает состояния равновесия, имея в этот момент времени максимальную скорость. Продолжая свое движение, по инерции, струна отклоняется от равновесия и в момент времени *t* **=** 2π/*a* достигает своего первоначального положения. Далее процесс колебания струны возобновляется по описанному закону. В соответствии с полученными результатами отклонение струны от равновесия и ее скорость являются периодическими функциями времени с периодом *t* **=** 2π/*a* . Параметр *а* в данном случае определяет частоту колебания струны.

#### **Компьютерный эксперимент. Колебание струны. Краевые задачи.**

Обратиться к лабораторной работе "*Поперечные колебания струны. Краевые задачи*". Провести следующий анализ:

1. Провести расчеты для процесса колебания струны с закрепленными концами. Обратить внимание на периодическое изменение со временем положения и профиля струны.

2. Убедиться в том, что кинетическая и потенциальная энергия струны меняются со временем периодически. Убедиться в выполнении закона сохранения энергии.

3. Установить влияние плотности и натяжения струны на решение   
задачи.

4. Провести расчеты для случая, когда в начальный момент времени   
состояние системы складывается из трех полуволн (синусоид).

5. Провести расчеты для процесса колебания струны со свободными   
концами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Наряду с поперечными, можно рассмотреть и продольные колебания струны (или стержня, или протяженной пружины), т.е. колебания, направленные вдоль струны. Этот процесс описывается практически так же, как и поперечные колебания. Колебания упругой балки характеризуются уравнением в частных производных четвертого порядка.

### **1. Продольные колебания струны.**

Процесс продольных колебаний можно охарактеризовать функцией   
*u = u*(*x*,*t*) , выражающей смещение в момент времени *t* вдоль струны точки, имеющей в состоянии равновесия координату *x*. Применяя закон сохранения импульса с учетом закона Гука для вычисления сил натяжения, установим, что уравнение продольных колебаний неоднородной струны имеет вид

 ,

где *x*) – плотность струна, а *k**x*) – модуль Юнга в точке *x*. В случае однородной струны коэффициенты уравнения постоянны, и мы приходим к уже   
известному уравнению поперечных колебаний.

#### **Компьютерный эксперимент. Продольные колебания струны.**

Обратиться к лабораторной работе "*Продольные колебания струны*". Провести следующий анализ.

1. Провести расчеты для случая закрепленных концов струны (однородные граничные условия первого рода). Убедиться в том, что смещение струны, ее скорость, а также кинетическая и потенциальная энергии меняются со временем периодически. Проверить справедливость закона сохранения энергии.

2. Сравнить процессы продольных и поперечных колебаний струны при одних и тех же параметрах системы.

3. Установить влияние плотности струны и модуля Юнга на процесс   
колебания.

4. Прове*с*ти расчеты с различными начальными состояниями струны.

5. Рассмотреть случай свободных концов струны (однородные граничные условия второго рода).

### **2. Колебания балки.**

Малые свободные колебания упругой ограниченной балки описываются уравнением четвертого порядка

ρ*utt* = *М* *uxxхх* ,

где *u = u*(*x,t*) – отклонение балки от состояния равновесия, ρ – плотность балки, *М* – модуль сдвига. В начальный момент времени задаются начальный профиль балки ϕ и ее начальная скорость ψ, что соответствует условиям

*u*(*x*,0) = ϕ(*x*) , *ut*(*x*,0) = ψ(*x*) .

где параметр *а*, считаются известными.

Для уравнения четвертого порядка следует задать четыре граничных условия – по два на каждом конце. Здесь имеется значительно большее количество вариантов, чем для струны. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда концы балки свободно опираются на некоторые опоры, что соответствует условиям

*u*(0,*t*) = 0 , *u*(*X*,*t*) = 0 , *uхх*(0,*t*) = 0 , *uхх*(*X*,*t*) = 0 .

#### **Компьютерный эксперимент. Колебание балки.**

Обратиться к лабораторной работе "*Колебания балки*". Провести   
следующий анализ:

1. Убедиться в том, что профиль балки и ее скорость меняются со   
временем периодически.

2. Убедиться в том, что кинетическая и потенциальная энергия балки меняются со временем периодически. Проверить выполнение закона сохранения энергии.

3. Провести расчеты, задавая различное количество полуволн в начальный момент времени.

# Лекция № 13 УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ

*Математический анализ... переводит все явления на один и тот же язык*, *как бы подчеркивая единство и простоту структуры окружающего нас мира и делая еще более заметным незыблемый порядок*, *правящий в природе всей материей.*

Жан Батист Жозеф ФУРЬЕ

Электродинамика изучает процессы, связанные с течением электрического тока. В лекции № 3 мы рассмотрели процессы, связанные с электрическим контуром, являющимся точечным объектом. В данном случае будет исследоваться электрический провод, обладающий определенными размерами и являющийся распределенным аналогом контура. Основываясь на балансе напряжений и зарядов, выводится система телеграфных уравнений относительно напряжения и силы тока. Если не учитывать электрическое сопротивление повода и утечку электричества через его изоляцию, то телеграфные уравнения сводятся к уравнениям колебания напряжения и силы тока, которые с точностью до обозначения совпадают с уравнением колебания струны.

Во второй части лекции рассматривается движение жидкости или газа в пространстве. Исследуемый процесс характеризуется вектором скорости, плотностью и давлением, которые зависят от времени и пространственных переменных. С помощью закона сохранения импульса выводится векторное уравнение Эйлера относительно скорости движения жидкости. Для плотности устанавливается уравнение неразрывности, выражающее материальный баланс системы. Функциональную связь между давлением и плотностью дает уравнение состояния. В результате получается система уравнений гидродинамики для идеальной жидкости.

Частным случаем изучаемого явления будет процесс распространения звуковых волн в пространстве. При этом уравнение состояния имеет достаточно простой вид, а в силу малости всех характеристик имеется возможность пренебречь нелинейными членами уравнений. В результате получаются уравнения акустики, которые сводятся к волновому уравнению – трехмерному аналогу уравнения колебания струны.

## 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОВОДАХ

Колебательный контур можно интерпретировать как электрический аналог пружины (см. лекция № 3). При этом сосредоточенному объекту – пружине соответствует распределенный объект – струна. Ее электрическим аналогом служит тонкий длинный провод. При течении тока по проводу меняются напряжение *V* и сила тока *I*, которые зависят от времени *t* и от пространственной координаты *х*, направленной вдоль провода. Считается, что провод обладает индуктивностью, емкостью и сопротивлением. Кроме того, некоторое количество энергии теряется из-за несовершенства изоляции провода. Установим уравнение состояния системы на основе соотношений, выражающих баланс напряжений и зарядов на участке провода.

Падение напряжения на некотором участке провода складывается из напряжений *V*1 на индуктивности и *V*2 на сопротивлении.   
Напряжение на индуктивности пропорционально скорости изменения силы тока. Отметим, однако, что поскольку объект исследования   
является распределенным, параметром процесса оказывается не собственно индуктивность провода (подобно индуктивности катушки   
контура), а индуктивность *L*0 единицы длины провода. Если сила тока не меняется по длине провода, то напряжение на индуктивности для провода длиной *Х* будет равно

*V*1 = *L*0 *I' X* .

Если же сила тока зависит от переменной *х*, то это равенство остается в силе лишь на участке сколь угодно малой длины *dx*:

*dV*1 = *L*0 *It* *dx* .

Здесь как и раньше выражение *It* обозначает частную производную ∂*I*/∂*t* . При рассмотрении участка провода [*x*, *x*+Δ*x*] получаем напряжение

.

Напряжение на сопротивлении определяется в соответствии с законом Ома, согласно которому напряжение пропорционально силе тока:

*V*2 = *R I* ,

где *R* – электрическое сопротивление. При рассмотрении протяженного объекта (провода) параметром процесса будет не сама величина *R*, а сопротивление единицы длины *R*0 . Тогда в случае постоянства силы тока напряжение на сопротивлении для провода длиной *Х* равно

*V*2 = *R*0 *I* *X* .

В случае переменной силы тока получаем соотношение



Рис. 57. Участок провода с индуктивностью и сопротивлением.

*dV*2 = *R*0 *I* *dx* ,

Тогда напряжение на сопротивлении для участка [*x*,*x*+Δ*x*] определяется по формуле

 .

Падение напряжения на рассматриваемом участке провода представляет собой разность между напряжениями в точках *х* и *x*+Δ*x* (см. рис. 57). Следовательно, баланс напряжений на участке провода [*x*,*x*+Δ*x*] характеризуется соотношением

 .

Пользуясь теоремой о среднем, будем иметь

 ,

где *x*\*∈[*x*,*x*+Δ*x*] . Переходя к пределу при Δ*x* → 0 , получаем уравнение

*Vx* + *L*0 *It* + *R*0 *I* = 0 . (13.1)

Установим теперь изменение заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t* . Заряд провода за время *Т* при условии постоянства силы тока равен

*q* = - *I T* .

В случае переменной силы тока это равенство выполнено лишь на сколь угодно малом интервале времени *dt*

*dq* = - *I dt* .

Тогда за время от *t* до *t*+Δ*t* получаем заряд

 .

Следовательно, изменение заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] на длинном   
интервале времени равно

 .

Заряд провода меняется в силу того, что он обладает некоторой электрической емкостью, а также за счет утечки из-за несовершенства изоляции провода. Как известно, заряд в цепи пропорционален   
напряжению

*q*  = *C V* .

Если напряжение не меняется, то заряд провода длиной *Х* равен

*q* = *C*0 *V X* ,

где *C*0 – емкость единицы длины провода. В случае переменного   
напряжения эта формула остается в силе лишь при рассмотрении   
участка сколь угодно малой длины

*dq*  = *C*0 *V dх* .

Тогда заряд участка провода [*x*,*x*+Δ*x*] равен интегралу

 .

Таким образом, на подзарядку рассматриваемой части провода за время от *t* до *t* + Δ*t* затрачивается следующее количество электричества

 .

Потеря заряда в единицу времени из-за его утечки через изоляцию пропорциональна напряжению

*q* = *G V* ,

где *G* – коэффициент утечки. Если напряжение постоянно, то за время *Т* на участке длиной *Х* теряется заряд

*q* = *G*0 *V Х T* ,

где *G*0 – коэффициент утечки единицы длины провода. В случае   
переменного напряжения получаем равенство

*dq* = *G*0 *V dx dt* ,

Таким образом, потеря заряда за счет утечки на данном участке   
провода на рассматриваемом интервале времени равна

 .

Согласно закону сохранения заряда, последний меняется за счет подзарядки провода и утечки, т.е. справедливо равенство

*q*1 = *q*2 + *q*3 .

В результате установим соотношение

 =

= + .

Применяя теоремы о среднем, получаем равенство



где *x*\*, *x*\*\*∈[*x*, *x*+Δ*x*] ; *t*\*, *t*\*\*∈[*t*, *t*+Δ*t*] . Переходя к пределу при   
Δ*x* → 0 , Δ*t* → 0 , получаем равенство

*Ix* + *C*0 *Vt* + *G*0 *V* = 0 . (13.2)

Соотношения (13.1), (13.2) лежат в основе математической модели исследуемого процесса и называются *телеграфными уравнениями*.

Установим отдельные уравнения относительно напряжения и силы тока. Продифференцируем равенство (13.1) по *х*, а (13.2) по *t*. Получаем равенства

*Vxx* + *L*0 *Itx* + *R*0 *Ix* = 0 ,

*Ixt* + *C*0 *Vtt* + *G*0 *Vt* = 0 .

Вычитая из первого соотношения второе, уменьшенное на *L*0 , будем иметь

*Vxx* + *R*0 *Ix* – *L*0 *C*0 *Vtt* – *L*0 *G*0 *Vt* = 0 ,

Подставляя сюда значение *Ix* из равенства (13.2), установим уравнение в частных производных второго порядка относительно напряжения

*Vtt* = *a*2 *Vxx* – *b* *Vt* – *c V* , (13.3)

где

.

Аналогичным образом получаются уравнения относительно силы тока

*Itt* = *a*2 *Ixx* – *b* *It* – *c I* , (13.4)

Если пренебречь потерей заряда через изоляцию и сопротивлением провода, то *R*0 = 0 , *G*0 = 0 . Тогда *b* = *c* = 0 , а уравнения (13.3), (13.4) принимают вид

*Vtt* = *a*2 *Vxx* , (13.5)

*Itt* = *a*2 *Ixx* . (13.6)

Соотношения (13.5), (13.6) с точностью до обозначений совпадают с уравнением колебания струны. Полученные уравнения колебания напряжения и тока в проводах и являются распределенными аналогами уравнения колебательного контура подобно тому, как уравнение колебания струны служить естественным обобщением уравнения колебания пружины на случай распределенного объекта.

Для полученных уравнений могут быть поставлены различные краевые задачи, подобные тем, что исследовались при изучении процесс колебания струны.

Сравнительная характеристика сосредоточенной (контур) и распределенной (провод) электрических моделей приводится в таблице 15.

## 2. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Обратимся теперь к исследованию простейших задач гидродинамики. Движение жидкости или газа существенно отличается от движения твердого тела, все точки которого описывают одинаковые траектории. Здесь мы имеем дело с распределенными объектами, т.е. характеристики процесса зависят не только от времени *t*, но и от вектора пространственных координат . Движение сопровождается изменением вектора скорости , плотности ρ и давления *p*. Эти величины и выбираются в качестве функций состояния системы.

Установим уравнение движения системы в соответствии с   
законом сохранения импульса. Пользуясь вторым законом Ньютона в векторной форме, запишем равенство

 , (13.7)

где *m* – масса, – вектор ускорения,– вектор силы.

Если жидкость, занимающая объем *V*, имеет постоянную плотность ρ, то ее масса будет равна

*m* = ρ *V* .

Если же плотность меняется от точки к точке, то это равенство имеет смысл только для сколь угодно малого объема *dV*.

*dm* = ρ *dV* . (13.8)

Табл. 15. Сравнение сосредоточенной и распределенной моделей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | характеристика | сосредоточенная модель  к о н т у р | распределенная модель  п р о в о д |
| 1 | напряжение  на индуктивности |  |  |
| 2 | напряжение  на сопротивлении | *V*2 *= R I* |  |
| 3 | баланс напряжений | *V*1 + *V*2 = *V* | *V*1 + *V*2 = *V*(*x*,*t*) – *V*(*x*+Δ*x*,*t*) |
| 4 | первое уравнение |  | *L*0 *It* + *R*0 *I* = -*Vx* |
| 5 | заряд |  |  |
| 6 | заряд  на конденсаторе | *q*2 = *C V* |  |
| 7 | баланс зарядов | *q*1 = *q*2 | *q*1 = *q*2 |
| 8 | второе уравнение |  | *C*0 *Vt*  = *Ix* |
| 9 | уравнение колебаний |  |  |

Мы ограничимся рассмотрением *идеальной жидкости*, для   
которой единственная принимаемая во внимание сила определяется давлением. В частности, не учитываются сила трения, связанная с вязкостью жидкости, и сила тяготения.

Давление *p* представляет собой силу, приходящуюся на единицу поверхности. В том случае, когда давление оказывается постоянным, сила давления, приходящаяся на поверхность площадью *S*, ограничивающую объем *V*, равна произведению давления на площадь данной поверхности.

Отметим, что сила является векторной величиной, а ее направление соответствует внешней нормали  – вектору единичной длины, перпендикулярному касательной плоскости к поверхности *S* и направленной из рассматриваемого объема. Естественно, каждой точке поверхности соответствует свое направление нормали. Таким образом, сила при постоянном давлении определяется по формуле

 . (13.9)

Для объяснения смысла знака "минус" в этом равенстве рассмотрим частный случай. Предположим, что данный объем представляет собой достаточно длинный и тонкий цилиндр. Тогда все характеристики можно считать усредненными по сечению цилиндра и зависящими от единственной скалярной пространственной переменной *x* направленной вдоль оси цилиндра. Рассмотрим участок цилиндра от точки *x*1 до точки *x*2 (см. рис. 58). Сила давления на участке складывается из сил, действующих на его концах:

 .

В точке *x*1 направление внешней нормали противоположно направлению координатной оси, а в точке *x*2 эти направления совпадают. Тогда справедливы равенства

 .

Пользуясь формулой (13.9), находим силу давления

 .

Очевидно, если давление в точке *x*1 будет выше, чем в точке *x*2 , то жидкость будет двигаться в положительном направлении (см. рис. 58), а значит, сила *F* положительна. Таким образом, знак в правой части равенства (13.9) выбран верно.

Следует отметить, что соотношение (13.9) в действительности имеет смысл не для всей поверхности *S*, а лишь для ее сколь угодно малого участка *dS*

. (13.10)



Рис. 58. При *p*1 > *p*2 сила давления положительна.

Ускорение  в условии (13.7) выражает не изменение скорости  жидкости в некоторой фиксированной точке, а изменение скорости какой-либо частицы, движущейся в пространстве. Если траектория движения характеризуется вектор-функцией , то ускорение   
будет равно



Вектор



называется *градиентом*. Для любых векторов  и  сумму произведений их компонент называют *скалярным произведением* и обозначают через  Таким образом, справедливо равенство

 .

В частности, имеем

 .

Тогда входящее в равенство (13.7) ускорение определяется по формуле

. (13.11)

Рассмотрим соотношение (13.7), отнесенное к малому объему *dV*

.

Подставляя в полученное выражение значения соответствующих   
величин из соотношений (13.8), (13.10) и (13.11), установим равенство

.

Для перехода к интересующему нас объему *V* выполняем операцию интегрирования

 . (13.12)

Отметим, что интеграл в левой части этого равенства является объемным, а в правой – поверхностным.

Из теории интегрирования известна связь между объемным и поверхностным интегралами. В частности, для любой дифференцируемой функции справедлива *формула Гаусса* – *Остроградского*



где *i* – угол между направлением внешней нормали и осью *xi* . Отметим, что *i*-ая компонента вектора , имеющего единичную длину, равна



Тогда справедливо векторное равенство

,

и соотношение (13.12) принимает вид

 .

В соответствии с теоремой о среднем значение объемного   
интеграла равно подынтегральному выражению в некоторой точке рассматриваемой области, умноженному на величину объема. В   
результате получаем равенство

 .

Учитывая произвольность выбранного объема, заключаем, что   
последнее соотношение справедливо в любой точке. Таким образом, имеем

 . (13.13)

Полученное выражение называется *уравнением Эйлера*или *уравнением движения идеальной жидкости*.

Из уравнения Эйлера, в принципе, можно определить вектор скорости. Однако в него входят также неизвестные плотность и   
давление. Таким образом, к трем уравнениям (13.13) необходимо   
добавить еще два соотношения, позволяющие найти функции  и *p*.

## 3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Установим материальный баланс в объеме *V*, ограниченном   
поверхностью *S*. Пользуясь формулой (13.8), находим массу жидкости, заключенной в этом объеме

.

Тогда за время от *t* до *t+*Δ*t* масса жидкости в объеме изменится на   
величину

.

Изменение массы в объеме происходит за счет ее вытекания через поверхность *S*. Для оценки количества вещества, проходящего через данную поверхность на рассматриваемом интервале времени вновь предположим, что объем *V* представляет собой достаточно длинный тонкий цилиндр. При этом все характеристики считаются усредненными по сечению цилиндра и являются функциями единственной пространственной переменной *х*, направленной по оси цилиндра. Если жидкость движется со скоростью *v*, то за время *T* через   
сечение *S* вытекает жидкость объемом *V = v S T*. (см. рис. 59).

В случае постоянства плотности масса равна

 .

Если скорость жидкости отрицательна, то масса увеличится на ту же величину *m*. Объединяя оба случая, приходим к равенству

 .



Рис. 59. Объем жидкости, вытекающей со скоростью *v*через сечение *S* за время *T*, равен *vST* .

Аналогичное соотношение справедливо для любой поверхности. Отметим лишь, что в общем (трехмерном) случае в правой части равенства должно находиться скалярное произведение векторов. Если же плотность и скорость являются переменными, то последнее соотношение имеет смысл на сколь угодно малом элементе поверхности *dS* и для малого интервала времени *dt*. В результате получаем равенство

 .

Для вычисления количества вещества, проходящего через   
поверхность *S* за время от *t* до *t+*Δ*t* необходимо проинтегрировать   
последнее соотношение по данной поверхности и по времени. Таким образом, находим значение

 .

где знак "минус" объясняется тем, что в приведенных выше рассуждениях речь шла о вытекании жидкости из данного объема.

Пользуясь формулой Гаусса – Остроградского, преобразуем поверхностный интеграл

.

Определим оператор *дивергенции*, обозначаемый через div, действие которого на произвольный вектор  характеризуется равенством

 .

При  имеем

 .

Таким образом, находим значение

 .

Материальный баланс в объеме *V* на интервале времени [*t*,*t+*Δ*t*] характеризуется равенством

 .

Пользуясь установленными выше формулами, будем иметь

.

Применяя теорему о среднем, получаем соотношение

,

где . Переходя к пределу при *t* → 0 получаем   
равенство

 . (13.14)

В силу произвольности выбранного объема и интервала времени оно будет выполняться в любой точке пространственно-временной области. Соотношение (13.14) служит для определения плотности и называется *уравнением неразрывности*.

Полученное соотношение рассматривают совместно с уравнением Эйлера. Для получения полной системы уравнений необходимо задать еще некоторое условие для нахождения давления. Обычно считается, что между давлением и плотностью существует некоторая функциональная связь

 , (13.15)

называемая *уравнением состояния*, причем конкретный вид функции *f* зависит от особенностей рассматриваемого явления.

Соотношения (13.13) – (13.15) составляют *уравнения гидродинамики* для идеальной жидкости. Дополненные соответствующими краевыми условиями, они образуют математическую модель исследуемого процесса.

## 4. УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Рассмотрим распространение звука в газе. Этот процесс описывается уравнениями гидродинамики при некоторых дополнительных условиях, позволяющих существенно упростить математическую модель. В частности, уравнение состояния (13.15) имеет вид

 ,

где *р*0 , 0 – начальныезначения давления и плотности,  = *cp* /*cv* , а *cp* и *cv* – теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме. Указанные величины считаются параметрами процесса. Второе допущение состоит в том, что все характеристики процесса достаточно малы, и в этой связи можно пренебречь квадратами и более высокими степенями функций состояния.

Введем новуюнеизвестную переменную

 ,

называемую *конденсацией* газа и являющуюся относительным изменением его плотности.Тогда справедливо равенство

 , (13.16)

а уравнение состояния принимает вид

 .

Разложим следующее выражение в ряд

 .

Пренебрегая всеми членами, начиная с квадрата *s*2, с достаточно большой степенью точности установим справедливость соотношения

. (13.17)

Аналогичным образом преобразуется выражение в правой части уравнения Эйлера

 .

Здесь все слагаемые, начиная с произведения неизвестных величин *s*∇*p*, достаточно малы. Второе слагаемое в левой части равенства (13.13) также имеет второй порядок малости. Тогда уравнение Эйлера принимает вид

 .

Из условия (13.17) находим градиент

 .

В результате получаем уравнение

 . (13.18)

где

 .

Рассмотрим уравнение неразрывности. Пользуясь формулой (13.16), находим производную

.

Пренебрегая членами второго порядка, получаем

.

Таким образом, установим соотношение

 . (13.19)

Исключим скорость из системы уравнений (13.18), (13.19). Действуя оператором дивергенции на соотношение (13.18), будем иметь

 .

Справедливо равенство

 .

Учитывая определение оператора Лапласа

 ,

приходим к соотношению



Дифференцируя равенство (13.19) по времени, получаем

 .

Таким образом, справедливо условие

, (13.20)

называемое *волновым уравнением*.

Пользуясь формулами (13.16), (13.17), установим, что плотность и давление также удовлетворяют волновым уравнениям

 ,  .

Установим уравнение относительно скорости. Дифференцируя равенство (13.18) по времени, будем иметь

 .

Действуя оператором ∇ на соотношение (13.19), получаем

.

Таким образом, справедливо уравнение

 .

Полученные соотношения называются *уравнениями акустики* и описывают распространение звуковых волн. Коэффициент *а* имеет размерность скорости и называется *скоростью звука* в газе. В частном случае, когда рассматривается плоское течение газа, т.е. имеются две пространственных переменных *х* и *у*, равенство (13.20) принимает вид

 .

Полученное соотношение с точностью до обозначений совпадает с уравнением колебания мембраны. В одномерном случае установим равенство

 ,

аналогичное уравнению колебания струны. Последние соотношения называют также двумерным и одномерным волновыми уравнениями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводятся уравнения Навье – Стокса, описывающие течение несжимаемой вязкой жидкости.

### **1. Уравнения Навье - Стокса.**

Более полные уравнения гидродинамики учитывают также трение   
между слоями жидкости, связанное с понятием вязкости, а также действие внешних сил, например, тяготение. Получаемые при этом уравнения движения имеют второй порядок по пространственной переменной.

В частности, при исследовании движения несжимаемой вязкой жидкости плотность считается постоянной, а уравнения движения и непрерывности образуют систему *уравнений Навье* – *Стокса*



 ,

где  – вязкость. Уравнения Навье – Стокса являются одними из наиболее ярких математических моделей физических процессов, имеющих многочисленные практические приложения.

## КОММЕНТАРИИ к лекциям 12 - 13

Общие проблемы волновой физики рассматриваются, например, в книгах Ф. Крауфорда [52], Г. Пейна [101], Дж. Пирса [105]. Вывод уравнений колебания струны и балки описывается А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [129]. Уравнение колебания струны можно получить и на основе принципа наименьшего действию.

По*м*имо поперечных (перпендикулярно оси *х*) и продольных (вдоль оси *х*) колебаний струны возможны также крутильные колебания (вокруг оси *х*), а также сочетание различных типов колебания [129]. Можно рассмотреть также затухающие колебания струны при наличии силы трения, а также вынужденные колебания струны, происходящие под действием какой-либо внешней силы. Получаемые при этом результаты аналогичны тем, которые были установлены в лекции № 2 при исследовании процесса колебания   
маятника или пружины.

Общая схема приведения уравнений в частных производных к каноническому виду описывается в любом стандартном курсе уравнений математической физики (см., в частности А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [129]). В   
зависимости от получаемого канонического вида осуществляется классификация уравнений. Про уравнение колебания струны говорят, что оно имеет *гиперболический тип*. Любое уравнение гиперболического типа второго   
порядка с двумя независимыми переменными может быть приведено к   
каноническому виду

 .

Вопросы корректности задач математической физики будут рассмотрены в лекции № 16.

Метод Фурье для рассматриваемых уравнений приводится в книгах В.С. Владимирова [19], С.Г. Михлина [91], А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [129], С. Фарлоу [132]. Если в начальный момент времени струна распределена по косинусоидальному закону, а концы струны являются свободными   
(на них не действует никакая сила), то соответствующее решение имеет вид



Оно может быть найдено (как и в случае первой краевой задачи) с   
помощью методов разделения переменных или интегральных преобразований (см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [129], С. Фарлоу [132]).

Ур*а*внение колебания струны (и его простейшие обобщения) обратимо во времени в том смысле, что по известным начальным значениям положения струны и ее скорости можно восстановить предысторию системы. В данном случае для описания процесса может быть определена динамическая группа преобразований (см. лекция № 4).

Ка*к* мы отмечали ранее, электрическим аналогом маятника или   
пружины является колебательный контур. Распределенные электрические колебания наблюдаются в электрическом проводе, который понимается, как некоторый протяженный объект. Электрические колебания в проводе описываются в последующей лекции.

Фундаментальное изложение задач электродинамики дается в книгах С. Г. Калашникова [41], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [62], [63], Э. Парселла [100], И. Е. Тамма [127]. При выводе телеграфных уравнений не учитывалось магнитное поле. Полная математическая модель электродинамики включает в себя *уравнения Максвелла* относительно напряженности электрического и магнитного полей. Уравнения Максвелла описывают, в частности, распространение электромагнитных волн.

Задачи гидродинамики описываются, например, в книгах Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [58], Л. Г. Лойцянского Л.И. [70], Л. И. Седова [120]. С математической теорией уравнений Навье – Стокса можно познакомиться в книге О. А. Ладыженской [57].

Своеобразный волновой процесс связан с уравнением Шредингера,   
которое будет рассмотрено в лекции № 17.

# Лекция № 14 ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА

*Наука родилась из веры в математическую сущность природы*, *утвердившуюся задолго до того*, *как это удалось проверить экспериментально*.

Джон Герман РЭНДАЛЛ

Рассматривается широкий класс процессов, в которых происходит перенос некоторой субстанции (тепла, вещества, заряда, информации и др.) из области, где ее концентрация (количество субстанции, приходящееся на единицу длины, площади или объема) достаточно высока в область, где значение этой концентрации сравнительно мало. В этих условиях наблюдается перераспределение рассматриваемой субстанции, вследствие чего система со временем стремится к некоторому равновесному состоянию. К подобному классу явлений относятся теплопроводность, диффузия, электропроводность и др. Все они при определенных условиях описываются уравнением в частных производных, называемым уравнением теплопроводности.

В настоящей лекции осуществляется вывод математических моделей процессов переноса. Описывается постановка важнейших краевых задач. Приводятся их простейшие решения. Дается обзор процессов переноса для различных предметных областей. В приложении вводится понятие обратной задачи, состоящей в восстановлении некоторых параметров системы по известным результатам измерения состояния системы. Рассматриваются некоторые специфические процессы переноса.

## 1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассматривается некоторое неравномерно нагретое тело.   
Отдельные его части оказываются более теплыми по сравнению с другими. Со временем почему-то происходит остывание более теплых участков и нагрев более холодных. Тем самым наблюдается перенос тепла в данном теле. Наша задача как всегда состоит в математическом моделировании описанного явления.

Функцией состояния исследуемого процесса является *температура* *u*. Очевидно, рассматриваемый объект оказывается распределенным, коль скоро температура меняется от точки к точке. Для простоты будем считать, что данное тело представляет собой достаточно длинный и тонкий цилиндр. В этом случае можно предположить, что все характеристики процесса усреднены по сечению цилиндра и зависят от единственной пространственной координаты *х*, направленной вдоль его оси. Необходимо получить некоторое соотношение для определения зависимости температуры от времени и пространственной переменной. С этой целью установим изменение количества тепла на некотором участке тела от точки *х* до *х*+Δ*х* за время от *t* до *t*+Δ*t*.

Для того чтобы нагреть тело массой *m* с температурой *u*1 до температуры *u*2 необходимо затратить количество тепла

*Q* = *c* *m* (*u*2 – *u*1) ,

где коэффициент пропорциональности *с* называется *теплоемкостью*и является параметром процесса. Масса однородного тела длиной *х* равна

*m* = ρ *x* ,

где ρ – линейная *плотность* (количество вещества, приходящегося на единицу длины). Таким образом, справедливо равенство

*Q*  = *c* ρ (*u*2 – *u*1) *х* .

Если теплофизические характеристики тела всё-таки меняются по его длине, то эта формула имеет смысл лишь на сколь угодно   
малом участке *dx*:

*dQ* = *c* ρ (*u*2 – *u*1) *dх* ,

Можно предположить, что *u*1 – это температура тела в момент времени *t*, а *u*2 – в момент времени *t*+Δ*t*. Тогда изменение количества тепла на участке [*х*,*х*+Δ*х*] за время от *t* до *t*+Δ*t* равно

 . (14.1)

Существует масса причин, способных вызвать изменение температуры тела. Это и механическое перемещение нагретого тела (конвективный перенос тепла), и теплообмен с окружающей средой, и тепловое излучение, и действие внешних источников тепла (печь, химическая реакция, лазер и т.д.). Однако мы ограничимся рассмотрением переноса тепла за счет явления теплопроводности, при котором наблюдается переход тепла из более теплой части тела в более холодную. Этот процесс можно охарактеризовать плотностью теплового потока или кратко *тепловым потоком* *q*, представляющим собой   
количество тепла, проходящее в единицу времени через данную точку (при исследовании теплопереноса в пространстве – через единицу   
поверхности).



Рис. 60. Направления теплового потока.

Если тепловой поток остается неизменным, то за время *t* через данную точку пройдет количество тепла

*Q* = *q t* .

В случае переменного теплового потока это равенство имеет смысл на сколь угодно малом интервале времени *dt*:

*dQ* = *q dt* .

Тогда количество тепла на интервале времени [*t*,*t*+Δ*t*] равно

 .

Нас интересует изменение количества тепла на данном интервале времени на участке [*х*,*х*+Δ*х*] . Считая тепловой поток направленным по оси *х* (см. рис. 60), установим, что изменение количества тепла в данной области на исследуемом интервале времени равно

 . (14.2)

Для преобразования этой формулы установим связь между тепловым потоком и температурой.

Рассмотрим две материальные точки с координатами *х*1 и *х*2 , причем *х*1 < *х*2 . Обозначим через *u*1 и *u*2 температуры этих точек. Оценим тепловой поток от одной точки к другой. Очевидно, он будет тем больше, чем больше разность температур и чем меньше расстояние между точками. Отметим, что тепло распространяется от горячего тела к холодному. Таким образом, при *u*1 < *u*2  направление теплового потока будет положительным, а при *u*1 > *u*2 – отрицательным (см. рис. 60). В результате приходим к формуле

 ,

где коэффициент пропорциональности λ называется коэффициентом теплопроводности (или кратко *теплопроводностью*) и является параметром процесса, характеризующим способность тела проводить тепло.

При рассмотрении не двух отдельных точек, а сплошного тела последнее равенство сохраняет смысл при сколь угодно большой близости точек. Устремляя точку *х*2 к *х*1 , получаем соотношение

*q* = - λ *ux* ,

называемое *законом Фурье*. Подставляя значение теплового потока в равенство (14.2), находим величину

 . (14.3)

Тепловой баланс на данном участке на исследуемом интервале времени характеризуется равенством

*Q*1 = *Q*2 .

Пользуясь формулами (14.1), (14.3), будем иметь

.

Применяя теорему о среднем, получаем равенство



где *x*\*∈ [*x*, *x*+Δ*x*] , *t*\*∈ [*t*, *t*+Δ*t*] .

Переходя к пределу при Δ*t* → 0 , Δ*x* → 0 , установим дифференциальное уравнение с частными производными

*c* ρ  =  , (14.4)

называемое *уравнением теплопроводности*. Если рассматриваемое тело является однородным, то параметры *c*, ρ и λ постоянны, а уравнение теплопроводности имеет вид

*ut = auxx* , (14.5)

где параметр

*a* = 

называется коэффициентом *температуропроводности*.

## 2. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим уравнение теплопроводности для тела длиной *X*. Будем считать, что левый конец расположен в начале координат, а правый имеет координату *х* = *X* . Будем исследовать процесс, начиная с момента времени *t* = 0 . Уравнение теплопроводности имеет первый порядок по времени и второй по пространственной координате (в многомерном случае – по всем пространственным координатам). Для однозначности решения задачи требуется задать дополнительно соответствующее количество краевых условий.

Условие по времени задается в начальный момент времени и имеет вид

*u*(*x*,0) = ϕ(*x*) , (14.6)

где ϕ – известное начальное распределение температуры. Для получения математически корректной задачи два граничных условия должны быть заданы таким образом, чтобы на каждом конце тела оказалось равно по одному условию. На левом конце тела может быть задан   
закон изменения температуры α

*u*(0,*t*) = α(*t*) ,

что соответствует условию первого рода. Наличие известного теплового потока β на границе характеризуется условием второго рода

λ *ux*(0,*t*) = β(*t*) .

В частности, при β = 0 получаем *условие теплоизоляции*. Применяется также условие третьего рода

λ *ux*(0,*t*) = *k* [ *u*(0,*t*) – *u*0(*t*)] ,

описывающее теплообмен с окружающей средой, где параметр *k* есть *коэффициент теплообмена*, а функция *u*0 выражает температуру   
окружающей среды. Аналогичные условия могут быть заданы и на   
правом конце тела.

В зависимости от особенностей исследуемого явления возможны различные сочетания граничных условий, которые приводят к различным типам краевых задач. Важнейшими из них являются *первая краевая задача*, включающая уравнение теплопроводности с начальным условием (14.6) и двумя условиями первого рода

*u*(0,*t*) = α1(*t*) , *u*(*X*,*t*) = α2(*t*) (14.7)

и *вторая краевая задача*, в которой соотношения (14.7) заменяются на условия второго рода

λ *ux*(0,*t*) = β1(*t*) , λ *ux*(*X*,*t*) = β2(*t*) . (14.8)

При рассмотрении переноса тепла в теле бесконечной длины имеет смысл *задача Коши*, включающая в себя уравнение теплопроводности и начальное условие (14.6) при *x*∈(-,) .

## 3. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим частный случай первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, для которого решение имеет достаточно простой вид. Пусть дано однородное тело длиной *X* = π , на границе которого поддерживается нулевая температура. Предполагается, что в начальный момент времени температура тела распределена по синусоидальному закону. Исследуемый процесс описывается уравнением

*ut*= *a*2 *uxx*

с начальным условием

*u*(*x*,0) = sin *x*

и однородными граничными условия первого рода

*u*(0,*t*) = 0 , *u*(π,*t*) = 0 .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение рассматриваемой краевой задачи определяется по формуле

** .

Согласно этому равенству распределение температуры по длине тела в любой момент времени остается синусоидальным. При этом температура тела в любой его точке со временем экспоненциально убывает и стремится к нулю при *t* → ∞ . Таким образом, мы наблюдаем постепенное остывание тела, причем интенсивность остывания будет наивысшей в его центре (см. рис. 61).

Проанализируем эти результаты. В начальный момент времени температура распределена не равномерно. Согласно закону Фурье возникают тепловые потоки, направленные из центра к краям тела. В силу того, что тепло уходит из центральной части тела, температура там убывает. Если бы тело было теплоизолированным, то мы наблюдали бы нагрев его концов за счет притока тепла из центра. Однако на концах тела постоянно поддерживается нулевая температура. Это означает, что подвод тепла из центра компенсируется отводом через границу в окружающую среду.



Рис. 61. Изменение температуры тела для первой краевой задачи.

Согласно закону Фурье значение теплового потока пропорционально разности температур. Как уже отмечалось, со временем температура в центре убывает, а на концах она остается неизменной. Таким образом, разность температур между центром и границами (точнее, производная *ux*) со временем убывает. Вследствие этого уменьшается и тепловой поток. Тогда в единицу времени из центра будет уходить всё меньшее количество тепла. Следовательно, остывание тела будет продолжаться, но с монотонно убывающей скоростью. Со временем всё тепло из тела уйдет в окружающую среду. В этой связи внутри тела установится равномерное (нулевое) распределение температуры.

Можно также оценить влияние коэффициента температуропроводности на течение процесса. Очевидно, чем больше значение параметра *а*, тем быстрее происходит остывание тела (см. рис. 62). Таким образом, этот коэффициент характеризует интенсивность переноса тепла данным материалом.



Рис. 62. Тело остывает тем быстрее, чем больше коэффициент *а*.

#### **Компьютерный эксперимент. Теплоперенос. Первая краевая задача.**

Обратиться к лабораторной работе "*Теплоперенос*". Провести следующий анализ в режиме "*нулевая температура на границе*" в отсутствии источников тепла:

1. На основе выводимой информации убедиться в том, что со временем устанавливается нулевая температура по всей длине тела.

2. Обратить внимание на изменение со временем теплового потока и количества тепла во всем теле.

3. Обратить внимание на изменение тепловых потоков через границу области.

4. Установить влияние коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и плотности на скорость остывания тела.

## 4. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Рассматривается некоторый объем, заполненный газом, причем распределение газа по объему предполагается неравномерным. В этих условиях мы можем наблюдать переток вещества из области, где его много, в менее заполненную область. Исследуемый процесс называется диффузией и характеризуется концентрацией – количеством молекул газа, находящихся в единице объема (в одномерном случае – на единице длины). Предположим для простоты, что рассматриваемый объем представляет собой достаточно длинный и тонкий цилиндр. При этих условиях можно считать, что концентрация u зависит лишь от времени t и одной пространственной координаты х, направленной вдоль оси цилиндра. Для построения математической модели исследуемого процесса установим изменения количества вещества на некотором участке [x,x+Δx] за время от t до t+Δt.

Если концентрация газа постоянна, то количество вещества на участке длиной *х* равно

*Q = u x* .

В случае переменной концентрации получаем равенство

*dQ* = *u dx* .

Тогда на участке от *х* до *x*+Δ*x* получается величина

 .

Следовательно, изменение количества вещества за время от *t* до *t*+Δ*t* равно

 . (14.9)

Существуют различные причины, которые могут вызвать перераспределение вещества внутри тела. Это может быть собственно диффузия (перенос вещества из области с высокой концентрацией в область, где она мала), механическое перемещение вещества, подвод или отвод вещества через боковую поверхность цилиндра, появление или исчезновение вещества за счет химических реакций, массоперенос за счет неравномерного распределения температуры или давления внутри тела (соответственно, термодиффузия и бародиффузия) и др. Мы ограничимся рассмотрения лишь переноса вещества за счет диффузии.

Процесс диффузии можно охарактеризовать с помощью понятия *диффузионного потока* *q* – количество вещества, проходящего в единицу времени через данную точку (в трехмерном случае – через единицу поверхности). Если диффузионный поток не меняется, то за время *Т* получим следующее количество вещества

*Q = q t* .

В случае переменного диффузионного потока получаем равенство

*dQ = q dt* .

Тогда за время от *t* до *t* + Δ*t*  получаем величину

 .

Таким образом, изменение количества вещества на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за данное время равно

 . (14.10)

Установим связь между диффузионным потоком и концентрацией. Рассмотрим некоторые точки *x*1 и *x*2 при *x*1 < *x*2 , в которых концентрация вещества равна соответственно *u*1 и *u*2 . За счет разности концентраций возникает диффузионный поток, величина которого тем выше, чем больше разность концентраций и чем меньше расстояние между точками. Учитывая, что поток направлен из области с высокой концентрацией в область, где она сравнительно мала, получаем равенство

 .

Здесь параметр *D* называется *коэффициентом диффузии* и характеризует интенсивность процесса диффузии для данного вещества. При выводе последнего соотношения рассматривались лишь две изолированные точки. При рассмотрении сплошной среды это равенство имеет смысл лишь в том случае, когда расстояние между точками сколь угодно мало. Переходя к пределу при *x*2 → *x*1 , установим соотношение

*q = -D u*, (14.11)

называемое *законом Фика*.В результате получаем равенство

 . (14.12)

Материальный баланс на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t* характеризуется равенством *Q*1 = *Q*2 , которое принимает вид

 .

Пользуясь теоремой о среднем, после деления на произведение Δ*x* Δ*t* и переходя к пределу при Δ*x*0 , Δ*t* 0 , установим соотношение

 =  , (14.13)

называемое *уравнением диффузии*. В частном случае, когда параметр *D* является постоянным, оно имеет вид

*ut* = *a*2 *uxx* , (14.14)

где *a* =  .

Полученное соотношение отличается от уравнения теплопроводности (14.6) только физическим смыслом входящих в него величин. Для уравнения диффузии могут быть поставлены краевые задачи, аналогичные рассмотренным в предшествующей лекции. Поскольку с математической точки зрения уравнения теплопроводности и диффузии совпадают, их решения обладают одинаковыми свойствами.

#### **Компьютерный эксперимент. Диффузия.**

Обратиться к лабораторной работе "*Диффузия*". Провести следующий анализ в отсутствии источников тепла.

1. Исследовать диффузию газа для случая нулевой концентрации на границе. Убедиться в том, что со временем все вещество выйдет за пределы рассматриваемой области, причем концентрация, диффузионный поток и количество вещества стремятся к нулю.

2. Установить влияние коэффициента диффузии на ход процесса.

3. Провести расчеты для случая изолированной области. Убедиться, что концентрация вещества со временем выравнивается, диффузионный поток стремится к нулю, а количество вещества в объеме со временем не меняется.

## 5. УРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Сравнивая вывод уравнений теплопроводности и диффузии, а также получаемый конечный результат, обратим внимание на несомненную близость этих явлений, по крайней мере, с математической точки зрения. Рассмотрим еще один физический процесс, казалось бы, не имеющий никакого отношения к рассмотренным ранее. Будем полагать, что в некоторой области находятся заряженные частицы, распределенные неравномерно по данному объему. Со временем можно наблюдать перераспределение зарядов из области, где их было много, в область, где их сравнительно мало. Это явление, называемое *электропроводностью*, можно охарактеризовать с помощью понятия *плотности зарядов* – заряда, приходящегося на единицу объема (в одномерном случае – на единицу длины). Как и в предшествующих задачах, мы ограничимся рассмотрением пространственно одномерного объекта, для которого функция состояния, т.е. плотность заряда *u*, будет зависеть лишь от времени *t* и пространственной координаты *х*.

Оценим изменение заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t* . Если плотность заряда в рассматриваемой области постоянна, то заряд участка длиной *х* равен

*Q = u x* .

В случае переменной плотности заряда установим соотношение

*d Q = u dx* .

Тогда на отрезке [*x*,*x*+Δ*x*] имеем заряд

.

Таким образом, изменение заряда за время от *t* до *t*+Δ*t* будет равно

 .

Мы ограничимся рассмотрением изменения плотности заряда в области только за счет явления электропроводности, т.е. перехода зарядов из области с высокой плотностью заряда в область, где она низка. Это явление описывается *потоком заряда**q*, выражающим заряд, проходящий в единицу времени через данную точку (через единицу поверхности в многомерном случае).

Если поток заряда постоянный, то за время *t* получаем заряд

*Q = q T* .

В случае переменного потока справедлива формула

*dQ = q dt* .

Таким образом, на интервале времени [*t*,*t*+Δ*t*] имеется заряд

 .

Таким образом, изменение заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за данное время равно

 .

Установим связь между потоком и плотностью заряда. Рассмотрим некоторые точки *x*1 и *x*2 при *x*1 < *x*2  с плотностью зарядов *u*1 и *u*2 соответственно. Очевидно, поток зарядов будет направлен из области с большой плотностью заряда в область, где эта величина меньше, причем значение потока прямо пропорционально разности зарядов и обратно пропорционально расстоянию между точками. В результате приходим к равенству

 .

где параметр *D* называется коэффициентом электропроводности и характеризует интенсивность переноса заряда в данной среде. Переходя к пределу при *x*2*x*1 , установим формулу

*q = - D ux* .

Тогда изменение количества заряда будет равно

 .

Закон сохранения заряда на участке [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t* характеризуется условием *Q*= *Q*. В результате получаем соотношение

 .

После применения теоремы о среднем, деления на величину Δ*x* Δ*t*  и перехода к пределу установим равенство

 =  ,

называемое *уравнением электропроводности*. В том случае, когда электропроводящая среда является однородной, коэффициент электропроводности будет постоянным, а последнее соотношение приводится к виду (14.14).

#### **Компьютерный эксперимент. Электропроводность.**

Обратиться к лабораторной работе "*Электропроводность*". Провести следующий анализ в отсутствии источников тепла.

1. Провести расчеты для случая нулевой плотности заряда на границе. Убедиться в том, что со временем все заряды выйдут за пределы рассматриваемой области, причем плотность заряда, поток заряда и количество вещества стремятся к нулю.

2. Установить влияние коэффициента электропроводности на ход процесса.

3. Провести расчеты для случая изолированной области. Убедиться в том, что плотность заряда со временем выравнивается, поток заряда стремится к нулю, а общий заряд в теле со временем не меняется.

## 6. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

С математической точки зрения явления теплопроводности, диффузии и электропроводности оказываются чрезвычайно близкими, хотя их физическая природа как будто бы различна. Во всех трех случаях исследуется процесс переноса некоторой субстанции (тепла, вещества, заряда), которую называют *мерой*. Мера является глобальной характеристикой объекта исследования и выражает количество рассматриваемой субстанции, содержащейся в определенной области. В частности, установленные ранее формулы (14.1) и (14.9) задают изменение меры *Q*1 участка [*x*,*x*+Δ*x*] за время от *t* до *t*+Δ*t*. Отметим, что мера описывается интегралом по данной области (в двумерном случае – по поверхности, в трехмерном – по объему).

Локальной характеристикой объекта является *функция состояния* (температура, концентрация, плотность заряда), фактически определяющая меру единицы длины (в двумерном случае – единицы площади, а в трехмерном – единицы объема) области. Функция состояния изначально распространена неравномерно по данной области. В силу некоторых причин (своих для каждого конкретного случая) существует тенденция к выравниванию функции состояния, что и определяет ход динамических процессов. Соответствующие уравнения состояния системы (теплопроводности, диффузии, электропроводности) выводятся на основе закона сохранения меры на некотором участке [*x*,*x*+Δ*x*] (на некоторой поверхности, в каком-либо объеме) за время от *t* до *t*+Δ*t*.

Для вывода балансного соотношения, выражающего имеющийся закон сохранения, вычисляется изменение меры *Q*1 на данном участке за указанное время, обусловленное неравномерностью распределения функции состояния системы в определенной области. В этой связи возникает *поток меры* (тепловой, диффузионный, зарядов), характеризующий количество рассматриваемой субстанции, проходящей в единицу времени, через данную точку (через единичную площадь). Изменение меры в данной пространственно-временной области под действие соответствующих потоков характеризуется величиной *Q*2 определяемой по формулам (14.2) и (14.10).

Поток меры пропорционален скорости изменения функции состояния в направлении оси *х*(в многомерном случае – градиенту функции состояния). При этом получается некоторый равновесный закон (Фурье, Фика и т.п.), устанавливающий связь между потоком и функцией состояния и непосредственно выражающий стремление данной системы к равновесному состоянию. *Равновесный закон*, выраженный соотношениями (14.3) и (14.11), включает в себя *равновесный коэффициент* (теплопроводности, диффузии, электропроводности), являющийся параметром процесса и характеризующий интенсивность переноса рассматриваемой субстанции (тепла, вещества, заряда) в данной среде. На основе равновесного закона можно конкретизировать вид *Q*2 , установив формулы (14.4) и (14.12).

*Закон сохранения меры* в данной пространственно-временной области выражается равенством *Q*1 = *Q*2 . Последнее соотношение преобразуется с помощью теоремы о среднем и предельного перехода, при котором указанная область сжимается в точку. В результате устанавливается уравнение состояния (теплопроводности, диффузии, электропроводности). В однородном случае параметры процесса считаются постоянными, а уравнение принимает вид (14.6) или, что то же самое, (14.14). Подобные уравнения, а также их различные обобщения называют *уравнениями переноса*.

## 7. ОБЗОР ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

Рассмотренные процессы характеризуются тем, что вследствие неравномерности распределения функции состояния в данной области возникают потоки, за счет которых система постепенно стремится к равновесному состоянию. Основные характеристики подобных явлений указываются в таблице 16. Попытаемся оценить механизм этого явления в различных интерпретациях.

Смысл явления теплопроводности, грубо говоря, состоит в следующем. Температура тела связана с кинетической энергией молекул, а значит, с их скоростями. В процессе движения молекулы сталкиваются и обмениваются энергией. При этом существенно более вероятной представляется та ситуация, при которой быстрая молекула передает часть энергии более медленной молекуле при их соударении. В результате быстрые молекулы замедляются, а медленные – ускоряются. Тем самым наблюдается постепенное выравнивание скоростей молекул, а значит, и их энергии. На макроскопическом уровне мы наблюдаем остывание более теплых участков тела и нагрев его более холодных участков. Таким образом, возникают тепловые потоки, приводящие к перераспределению температуры.

Табл. 16. Характеристики процессов переноса.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **процесс** | **мера** | **функция состояния** | **характеристика**  **распределенности** | **равновесный  коэффициент** |
| 1 | теплопроводность | количество тепла | температура | пространство | теплопроводность |
| 2 | диффузия | количество вещества | концентрация | пространство | коэффициент диффузии |
| 3 | электропроводность | заряд | плотность заряда | пространство | электропроводность |
| 4 | движение жидкости | импульс | вектор скорости | пространство | вязкость |
| 5 | фильтрация | количество вещества | концентрация | пространство | коэффициент фильтрации |
| 6 | диффузия в полупроводнике | число дырок и электронов | плотность частиц | пространство | коэффициент  диффузии частиц |
| 7 | диффузия в ядерном реакторе | число нейтронов | плотность нейтронов | пространство | коэффициент  диффузии нейтронов |
| 8 | распространение  биологического вида | численность вида | плотность вида | пространство |  |
| 9 | миграция населения | численность населения | плотность населения | пространство |  |
| 10 | распространение информации | количество информации | плотность информации | пространство |  |
| 11 | социальная борьба | доходы населения | индивидуальные  доходы | население |  |
| 12 | рынок капитала | объем капиталовложения | концентрация  капитала | места вложения капитала |  |
| 13 | рынок труда | численность трудо- способного населения | заинтересованность  в виде деятельности | виды  деятельности |  |
| 14 | ценообразование | доходы производителей | цена товара | производители продукции |  |
| 15 | распространение дефицита | количество товара | плотность товара | пространство |  |

При исследовании явления диффузии на микроскопическом уровне мы вновь имеем дело с движением молекул. В области с высокой концентрацией содержится большее число молекул. Естественно, длина свободного пробега молекулы, т.е. расстояние, проходимое молекулой между двумя соударениями, будет тем больше, чем меньше молекул может встретиться на ее пути. Таким образом, в единицу времени из области с высокой концентрацией вещества в область, где концентрация сравнительно мала, перейдет больше молекул, чем в противоположном направлении. Тем самым наблюдается диффузионный поток, за счет которого происходит выравнивание концентрации газа в данном объеме. Похожие процессы связаны с явлением фильтрации, где массоперенос происходит не в свободном объеме, а сквозь некоторое пористое тело. Определенную аналогию с указанными явлениями имеет также диффузия нейтронов в ядерном реакторе.

Явление электропроводности обусловлено взаимным отталкиванием одноименных зарядов. В области с высокой плотностью заряда в соответствии с законом Кулона будут действовать значительные силы отталкивания, стремящиеся развести заряды в разные стороны. Естественно, наибольшее влияние этих сил будет в том направлении, где плотность заряда минимальна, поскольку там будут действовать сравнительно небольшие силы отталкивания. Таким образом, наблюдается поток зарядов, определяющий явление электропроводности. Близкие явления связаны с движением электронов и дырок в кристаллической решетке полупроводника.

К числу процессов переноса относится и движение жидкости. Молекулы жидкости движутся с различными скоростями. В процессе их соударения происходит обмен импульсами. В результате более быстрые слои жидкости замедляются, а более медленные – ускоряются, что связано с вязкостью жидкости. На макроскопическом уровне наблюдается постепенное выравнивание скоростей движения различных ее слоев.

Своеобразным процессом переноса является миграция биологического вида. Предположим, что некоторый вид распределен неравномерно по какой-либо территории. Тогда его численность оказывается не одинаковой в разных областях. В силу ограниченности пищи наблюдается перемещение животных из области с высокой численностью вида, где наблюдается острая конкурентная борьба за пищу, в зону, где численность вида относительно мала, и больше шансов найти себе пропитание. В результате наблюдаются "поток вида", вследствие которого вид постепенно распространяется по всей территории. Это распределение будет равномерным, если вся рассматриваемая область обладает одинаковыми запасами пищи и другими условиями проживания биологического вида. К описанному выше явлению близок процесс миграции населения. Естественно причиной рассредоточения населения будет не только нехватка пищи на ограниченной территории, но и различного рода социальные факторы.

При изучении процесса распространения информации роль "взаимодействующих частиц" играют люди, существенно различающиеся между собой по степени информируемости, т.е. по плотности информации – количеству информации, имеющейся у данного человека. В процессе взаимодействия людей происходит обмен информацией, в результате чего уровень информируемости выравнивается. Здесь, правда, следует иметь в виду, что при обмене информацией информируемость источника не уменьшается. Однако в силу повышения уровня информируемости слабо информируемых людей в рассматриваемой системе постепенно устанавливается более равномерное распределение плотности информации. Система образования, средства массовой информации, научные конференции, шпионаж, распространение слухов и т.д. фактически представляют собой определенные формы переноса информации.

В определенной степени к явлениям переноса следует отнести и социальную борьбу населения. Различные слои населения могут существенно различаться по своим доходам. Возникает соблазн проведения перераспределения этих доходов – к изъятию излишков средств у более богатых и передаче их беднякам. На более мягком уровне эту задачу решает государственная социальная политика (прогрессивный налог, социальная помощь малоимущим, пособия по безработице и т.д.). Иногда выравнивание доходов населения и осуществляется насильственным путем – с помощью социальной революции. Отметим, что в модели социальной борьбы в качестве распределенной координаты используется не пространственная переменная, а слои населения. В частности, функцией состояния системы здесь можно считать доходы населения, которые меняются от человека к человеку и со временем.

С процессами переноса связано функционирование рынка капитала.Различные предприниматели могут вкладывать имеющиеся у них средства в те или иные предприятия и сферы услуг. Если, к примеру, окажется, что большое число предпринимателей занимаются выпуском холодильников, а малое – стиральных машин, то со временем выяснится, что холодильники на рынке будут в избытке, а стиральные машины – в дефиците. В этих условиях многие предприниматели сочтут для себя выгодным перепрофилировать свои предприятия на выпуск стиральных машин в надежде получить более высокие доходы за счет реализации товара, пользующегося повышенным спросом. Таким образом, происходит постепенное выравнивание концентрации капитала.

Аналогичные явления наблюдается и на рынке труда. Если, например, дефицитной оказывается специальность дворника, в то время как потребность в бизнесменах остается сравнительно низкой, то дворникам предоставляются достаточно высокие оклады, тогда как среди бизнесменов наблюдается значительная безработица. В результате появляется всё больше желающих сделаться дворниками и всё меньше – бизнесменами. Тем самым рассматриваемая система стремится к равновесному состоянию.

Обратимся теперь к процессу ценообразования. Предположим, что на какой-либо товар различные предприниматели назначают разную цену. Естественно те из них, у кого цена оказалась слишком высокой, не смогут сбыть свою продукцию. Во избежание разорения они вынуждены снизить цену. С другой стороны, у предпринимателя, назначившего не слишком большую цену, товар быстро раскупается. Тогда с целью получения более высоких доходов хитрый предприниматель повышает цену. Таким образом, происходит постепенное выравнивание цен на данный товар у различных предпринимателей.

Одним из наиболее ярких примеров процесса переноса является распространение дефицитного товара по некоторой территории. Если в какой-либо местности данный товар пользуется повышенным спросом, а в другой области он в избытке, то наблюдается перенос товара из зоны с его высокой плотностью туда, где плотность товара мала. На этом принципе фактически основывается любая коммерческая деятельность.

Естественно перечисленные примеры далеко не исчерпывают обширный список процессов переноса.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Описываются некоторые обобщения уравнения теплопроводности на случай, когда перенос тепла осуществляется не только за счет явления теплопроводности, но и под действием других факторов. Рассматривается уравнение теплопроводности для тела, теплоизолированного на концах, при наличии постоянного действующего источника тепла. Приводится простейшее решение второй краевой задачи для уравнения теплопроводности. Описываются некоторые специфические химические и биологические процессы переноса.

### **1. Обобщения уравнения теплопроводности.**

Как уже отмечалось, перенос тепла может происходить не только за счет явления теплопроводности. Если нагретое тело движется со скоростью *v*, то происходит перенос тепла, называемый конвективным**.** В этом случае вместо соотношения (14.5) получается более общее уравнение

*c* ρ  =  – *v* .

При наличии теплообмена между рассматриваемым телом и окружающей средой уравнение теплопроводности принимает вид

*c* ρ  =  + *k* (*u*0 – *u*) ,

где *u*0 – температура окружающей среды, а *k* – параметр, называемый коэффициентом теплообмена (или теплопередачи) и характеризующий интенсивность теплового взаимодействия между телом и окружающей средой.

На тело может воздействовать и какой-либо внешний источник тепла, связанный с действием печи или холодильника (в последнем случае источник считается отрицательным), химической реакции, лазерным излучением и т.п. Эти явления можно охарактеризовать с помощью плотности теплового источника *f* – количества тепла, получаемого или отдаваемого телом в единицу времени. При наличии внешних источников тепла получаем неоднородное уравнение теплопроводности

*c* ρ  =  + *f*  .

Все приведенные выше уравнения являются пространственно однородными. При исследовании распространения тепла на плоскости *х*, *у* в случае однородного тела получаем двумерное уравнение теплопроводности

*ut*= *a*2 ( *uxx* + *uyy* ) .

Распространение тепла в пространстве *х*, *у*, *z* описывается уравнением

*ut*= *a*2 ( *uxx* + *uyy* + *uzz* ) ,

которое с помощью оператора Лапласа приводится к виду

*ut* = *a*2 Δ *u* .

Естественно, в многомерном случае можно рассматривать тело, не однородное по своей структуре, а также учесть влияние различных типов переноса.

### **2. Вторая краевая задача.**

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение теплопроводности

*u* = *a*2 *uхх* + cos *x*

на отрезке (0,π) с начальным условием

*u*(*x*,0) = 0

и однородными граничными условиями второго рода

*ux*(0,*t*) = 0 , *ux*(*X*,*t*) = 0 .

Таким образом, исследуется процесс переноса тепла при наличии теплового источника, влияние которого характеризуется входящим в уравнение теплопроводности косинусом. Тем самым к левой части тела тепло подводится, а из его правой части оно отводится. При этом влияние теплового источника возрастает к границе тела. В начальный момент времени температура тела равна нулю. Концы тела являются теплоизолированными, т.е. взаимодействие с окружающей средой на границе тела не происходит.

Можно показать, что решение данной задачи определяется по формуле

*u*(*x*,*t*) = *a*-2[1 – exp(-*a*-2*t*)] cos *x* .

Рис. 63. Изменение температуры тела для второй краевой задачи.

Таким образом, в любой момент времени температура по длине тела распределена по закону косинуса. В левой половине тела она растет, а в правой падает, причем скорость изменения температуры возрастает при переходе от центра тела к границам. Со временем устанавливается некоторое равновесное распределение температур (см. рис. 63). Отметим также, что нас не должно настораживать появление отрицательной температуры, поскольку последняя может измеряться не обязательно в градусах Кельвина (тем более что нас в данном случае интересует лишь качественное поведение системы).

Поскольку в начальный момент времени температура распределена равномерно, теплопроводность отсутствует. Изменение температуры происходит под действием внешнего теплового источника: левая половина греется, а правая – остывает, причем, чем ближе к границе, тем сильнее влияние источника. Отметим, что действие источника тепла со временем не меняется. Однако по мере возрастания температуры слева и ее убывания справа появляется тепловой поток, действующий слева направо. В силу теплоизоляции концов тела его взаимодействие с окружающей средой отсутствует. Нагрев тела в левой его части и остывание в правой части постепенно компенсируются потоком тепла из горячей области в холодную, т.е. явлением теплопроводности. Тем самым внутри тела устанавливается *термодинамическое равновесие*, характеризуемое предельным значением *u*∞(*х*) = cos *x* .

#### **Компьютерный эксперимент. Теплоперенос. Вторая краевая задача.**

Обратиться к лабораторной работе "*Теплоперенос*". Провести следующий анализ в режиме "теплоизоляция на границе" при наличии источников тепла:

1. На основе выводимой информации убедиться в том, что со временем устанавливается равновесное распределение температуры.

2. Обратить внимание на изменение со временем теплового потока и количества тепла, содержащегося в теле.

3. Обратить внимание на изменение температуры на границе области.

4. Установить влияние параметров системы на скорость ее выхода в равновесное состояние.

### **3. Обратные задачи теплопереноса.**

Зная законы физики, химии и других частных наук, можно, в принципе, установить математические модели соответствующих процессов. С их помощью имеется возможность определить зависимость функций состояния системы от своих аргументов при тех или иных значениях параметров процесса. Последние величины обычно характеризуют конкретные условия протекания рассматриваемого явления, свойства имеющегося материала и т.д. Подобная информация, как правило, устанавливается экспериментально. К сожалению, некоторые параметры бывает затруднительно измерить непосредственно. В этом случае приходится довольствоваться той информацией о процессе, которую всё же удалось получить. Характерно, что на практике обычно проще измерить функцию состояния системы (температуру, концентрацию и др.), чем параметры системы (теплопроводность, коэффициент диффузии и т.п.). Возникает вопрос, каким образом можно воспользоваться имеющейся информацией, чтобы восполнить имеющийся у нас недостаток сведений о параметрах модели. Этот вопрос исследуется с помощью *теории идентификации* математических моделей.

Рассмотрим достаточно тонкое длинное тело, в котором происходит перенос тепла за счет явления теплопроводности и действия тепловых источников, определяемых плотностью тепловых источников *f*. Исследуемое явление описывается уравнением теплопроводности

*c* ρ  =  + *f*  .

Начальная температура распределение температуры *u*0 считается известной

*u*(*x*,0) = *u*0(*x*) .

На левой границе известен закон изменения температуры *a = a*(*t*)

*u*(0,*t*) = *a*(*t*) .

Hа правой границе происходит теплообмен с окружающей средой

λ *ux*(*X*,*t*) *= k* [ *u*(*X*,*t*) – *b*(*t*) ] ,

где *k* – коэффициент теплопередачи, *b* – температура окружающей среды.

*Прямая задача* теплопереноса предполагает определение функции *u* = *u*(*x*,*t*) , являющейся решением приведенной выше краевой задачи при всех известных значениях параметров. *Обратная задача* состоит в нахождении одного или нескольких из перечисленных параметров в той или иной форме на основе какой-либо информации о состоянии системы. Таким образом, постановка обратной задачи предполагает указание тех параметров, которые подлежат определению, формы задания этих параметров и информации о результатах измерения состояния системы.

В зависимости от того, какие именно величины подлежат определению, возникают следующие обратные задачи теплопереноса: определения источника *f* ; коэффициентные обратные задачи,связанные с нахождением коэффициентов *c*, ,  (одного или нескольких) уравнения теплопроводности; ретроспективная обратная задача, связанная с восстановлением предыстории системы, что сводится нахождению начальной температуры; граничные обратные задачи, в которых требуется установить информацию о поведении системы на границе данной области; геометрическая обратная задача, состоящая в определении размеров области, т.е. параметра *X*. Возможны и смешанные обратные задачи, в которых требуется одновременное нахождение нескольких параметров различной природы. Искомые величины могут представлять собой числовые параметры, функции независимых переменных, известные функции от температуры с неизвестными параметрами.

Дополнительная информация о состоянии системы может быть задана, например, в некоторых точках рассматриваемой области

*u*(*xi*,*t*) = *ui*(*t*) , *i =* 1, ... , *n* , 0 < *t* < *T*  (14.15)

или на ее границе. В частности, на левой границе может быть дополнительно задан тепловой поток, а на правом конце – температура. Для ретроспективной обратной задачи возможно задание температуры в конечный момент времени.

Для практического решения обратных задач их, как правило, сводят к некоторым задачам на экстремум. В частности, если измеряемая информация характеризуется соотношением (14.15), то можно определить величину

 ,

называемую *невязкой*, где *u*(*xi*,*t*) – решение рассматриваемой краевой задачи с соответствующим набором независимых переменных при фиксированном значении идентифицируемых параметров. Очевидно, невязка не отрицательна, причем она равна нулю исключительно при выполнении условий (14.15). Таким образом, если на некотором значении искомого параметра достигается минимум невязки, равный нулю, то тем самым оказывается решенной рассматриваемая обратная задача. В том случае, когда соответствующий минимум отличен от нуля, обратная задача не имеет точного решения, а найденное значение идентифицируемого параметра обеспечивает выполнение соотношений (14.15) в максимально возможной степени.

### **4. Диффузия при наличии химической реакции.**

В лекции № 5 рассматривались уравнения химической кинетики, описывающие изменение со временем концентраций реагирующих веществ. Если эти вещества распределены неравномерно в заданной области, то в дополнение к химической реакции следует еще учитывать и диффузию. Предположим для простоты, что рассматривается реакция первого порядка, в которой происходит распад некоторого вещества. Тогда изменение его концентрации во времени и в пространстве в одномерном случае будет описываться уравнением

 ,

где *k* – константа скорости реакции. Здесь первое слагаемое в правой части характеризует изменение концентрации за счет диффузии, а второе – за счет химической реакции. Аналогичным образом описываются и более сложные реакции.

### **5. Миграция конкурирующих видов.**

Рассмо*т*рим задачу о конкуренции двух биологических видов, мигрирующих по некоторой территории. Тогда изменение плотности видов происходит как за счет их миграции из области, где плотность вида велика, в сравнительно не населенную область, так и в силу межвидовой конкуренции. В результате получаем суперпозицию уравнений типа диффузии (14.13) и конкуренции (6.4)

,

*ui* – плотность *i*-ого вида, *Di* – коэффициент его миграции, *ai* – удельный прирост *i*-ого вида, *qi*– потребление пищи *i*-ым видом, *di –* эффективный прирост *i*-ого вида *i* = 1,2 (см. лекция № 6). Миграция биологических видов при других формах их сосуществования описывается аналогично.

## КОММЕНТАРИИ

Все рассмотренные в данной лекции уравнения относят к *параболическому типу*. Более подробно теория этих уравнений рассматривается в соответствующем разделе курса уравнений математической физики (см., например, В.С. Владимиров [19], С.Г.Михлин [91], А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [129], С.Фарлоу [132]). Каноническая форма уравнения параболического типа второго порядка с двумя неизвестными переменными имеет вид

 .

Общие вопросы термодинамики излагаются, например, в книгах Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [61] и Ю.Б. Румера, М.Ш. Рывкина [117], а молекулярной физики – Дж. Гиршфельдера, Ч. Кертисса, Р. Берда [24] и И.К. Кикоина, А.К. Кикоина [43]

Уравнение теплопроводности согласуется со *вторым законом**термодинамики***,** который и характеризует стремление системы к равновесному состоянию, что связано с возрастанием *энтропии*. Рассматриваемые уравнения не обратимы во времени, т.е. по данному состоянию системы нельзя восстановить ее предысторию. Математически это означает, что краевая задача для уравнения теплопроводности с известным конечным, а не начальным состоянием оказывается не корректной (см. лекция № 16). Собственно, наличие необратимых процессов во времени и определяет само понятие времени, для которого имеется принципиальное различие между прошлым и будущим. Для волновых процессов энтропия постоянна (если не учитывать трение и т.п.) и обращение времени допустимо.

Процессы переноса не являются строго детерминированными в том смысле, что по данному состоянию системы можно определить лишь будущее, но не прошлое (см. лекция № 4). В этой связи им уже не будет соответствовать динамическая группа преобразований (будет нарушено условие обратимости соответствующего преобразования). Однако имеет смысл понятие *динамической полугруппы преобразования*, для которого соответствующее требование обратимости отсутствует.

Как видно из формулы (14.15) равновесное состояние системы не обязательно является равномерным. Эти два понятия совпадают в том случае, когда коэффициенты уравнения постоянны и отсутствует влияние источников. В многомерном случае равновесные состояния (т.е. предельные состояния динамической системы при *t*) будут описываться уравнениями с частными производными (см. лекция № 15).

Решение краевых задач для уравнения теплопроводности может быть получено, например, с помощью методов Фурье или интегральных преобразований (см. (см., например, В.С. Владимиров [19], С.Г. Михлин [91], А.Н. Тихонов, А.А. Самарский [129], С.Фарлоу [132]). Более сложные задачи обычно решаются численно.

Немалый интерес представляют процессы теплопереноса, связанные с изменением агрегатного состояния вещества. В этом случае возможно присутствие вещества в различных фазовых состояниях, причем граница раздела фаз может меняться со временем. Математические модели подобного процесса представляют собой *задачу Стефана*для уравнения теплопроводности, которое включает себя уравнение относительно движущейся границы раздела фаз.

Математические модели реальных физических процессов, как правило, описывают одновременно и теплоперенос, и движение, и диффузию.

В анализе мерами принято называть функции множества, обладающие следующими свойствами. Мера всегда неотрицательна. Мера пустого множества равна нулю. Мера аддитивна, т.е. мера объединения двух непересекающихся множеств равна сумме их мер. Естественно, используемое выше понятие меры отвечает всем этим свойствам. Отметим также, что понятие меры неизменно связано с операцией интегрирования. Общая теория меры излагается, например, в книге П.Р. Халмоша [139].

# Лекция № 15 CТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

*Математика говорит на одном языке со всеми сопутствующими искусствами и вообще со всеми созданиями повседневной жизни*, *на одном языке форм*, *в котором одновременно и проявляются и скрываются глубочайшие возможности духовной стихии.*

Освальд ШПЕНГЛЕР

В предшествующей лекции отмечалось, что для процессов переноса характерно стремление системы к равновесному состоянию. Это состояние, как правило, является неравномерным и описывается некоторым дифференциальным уравнением (в многомерном случае уравнением с частными производными). Системы, находящиеся в положении равновесия или установившиеся (т.е. стационарные) процессы представляют самостоятельный интерес и должны быть объектами непосредственного исследования. Эти вопросы и являются предметом настоящей лекции. Здесь описываются задачи стационарного теплопереноса, стационарного течения жидкости и электростатики. Все они в простейшем случае связаны с уравнениями Лапласа или Пуассона. Записывая уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических координатах, можно найти решения этого уравнения, обладающие цилиндрической и сферической симметрией. В качестве приложения определяется закон изменения потенциала электростатического поля точечного заряда и заряженного провода.

## 1. СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС

Рассматривается процесс переноса тепла в пространстве при наличии внешних тепловых источников. Как известно, он описывается уравнением теплопроводности (см. лекция № 14)

,

где *u* – температура, *с* – теплоемкость,  – плотность,  – теплопроводность, *F* – плотность тепловых источников. Будем полагать, что функция *F* не зависит от времени. Тогда решение уравнения теплопроводности со временем стремится к некоторому равновесному состоянию. Установим уравнение, характеризующее это состояние.

Перейдем к пределу в последнем равенстве при *t* → ∞ . По мере выхода состояния системы в состояние равновесия скорость изменения функции *u* со временем стремится к нулю. Тогда в результате   
предельного перехода установим соотношения

 .

Если рассматриваемый объект является однородным, то   
коэффициент теплопроводности оказывается константой. В результате получаем уравнение

,

где *f =* -*F/* . Учитывая определение оператора Лапласа Δ, приходим к соотношению

, (15.1)

которое называется *уравнением Пуассона*. Оно представляет собой уравнение в частных производных, в котором независимыми переменными оказываются пространственные координаты. При отсутствии внешних источников тепла функция *F* обращается в нуль. Тогда   
соотношение (15.1) принимает вид

 (15.2)

и называется *уравнением Лапласа*. Уравнение Лапласа и Пуассона   
являются простейшими уравнениями стационарного теплопереноса.

## 2. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим движение жидкости в пространстве (см. лекция   
№ 13). Оно характеризуется плотностью  и вектором скорости , которые связаны уравнением неразрывности

 .

В стационарном случае получаем равенство

 .

Если жидкость является несжимаемой, то ее плотность постоянна, а уравнение неразрывности принимает вид

 .

Для описания стационарного течения несжимаемой жидкости вводят новую функцию состояния, которая обозначается через *u*, называется *потенциалом поля скоростей*и связана со скоростью соотношением

 .

Подставляя это значение в уравнение неразрывности, будем иметь

 .

Учитывая, что дивергенция от градиента представляет собой оператор Лапласа, заключаем, что потенциал поля скоростей для стационарного течения несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

 .

## 3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим электрическое поле в пространстве. Его можно   
характеризовать с помощью *вектора плотности тока*. В стационарном случае (для электростатического поля) в соответствии с *уравнениями Максвелла* справедливо соотношение

 .

Плотность тока пропорциональна *напряженности* электрического поля ****

 ,

где коэффициент пропорциональности  называется *проводимостью* среды (величина, обратная к электрическому сопротивлению) и является параметром процесса. В результате получаем уравнение

 .

Если проводящая среда однородна, то ее проводимость постоянна. Тогда справедливо равенство

 .

Для описания электростатического поля вводится новая   
функция состояния – *потенциал электростатического поля* *u*, которая связана с напряженностью соотношением

 .

Тогда потенциал электростатического поля будет удовлетворять   
уравнению Лапласа

 .

## 4. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Мы убедились в том, что уравнения Пуассона и Лапласа описывают некоторый класс стационарных процессов. Они представляют собой уравнения в частных производных с тремя независимыми   
переменными (для двумерного случая – с двумя, в одномерном случае получаем обыкновенные дифференциальные уравнения). В отличие от рассмотренных ранее систем зависимость функций состояния от времени отсутствует. Однако полная постановка задачи, допускающей единственное решение, требует некоторых дополнительных условий, характеризующих состояние системы на границе рассматриваемой области.

Предположим, что рассматриваемое уравнение выполняется в некоторой области Ω, ограниченной поверхностью *S*. В каждой точке области *S* может быть задано значение функции состояния

*u =* ϕ на *S* , (15.3)

где ϕ – известная функция, определенная на *S*. В частности, для стационарного теплопереноса величина ϕ представляет собой температуру на границе рассматриваемой области. Соотношение (15.3) называется *условием первого рода*, а уравнение Лапласа (или Пуассона) с этим условием составляют *задачу Дирихле*.

При задании краевых условий до сих пор мы как будто строго придерживались следующего принципа: каков порядок производной по данной независимой переменной, такое количество дополнительных условий должно быть определено для достижения единственности решения задачи. Рассматриваемые уравнения имеют второй порядок по каждой независимой переменной. В этой связи, казалось бы, следовало бы задать шесть граничных условий. Тогда не совсем понятно, каким образом единственное граничное условие (15.3) может дать полную информацию о поведении системы на границе.

Отметим, однако, что ранее мы рассматривали либо обыкновенные дифференциальные уравнения, либо уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными, одним из которых было время (уравнения в многомерных областях выше рассматривались без краевых условий). В обоих этих случаях указанный выше принцип определения необходимого числа граничных условий, безусловно, работает. При постановке краевых условий для уравнений колебания струны или теплопроводности мы имеем дело с двумя переменными, каждая из которых меняется независимо друг от друга: объект исследования имеет конкретную длину и рассматривается на определенном интервале времени (возможно, бесконечном). В многомерном случае область Ω может иметь произвольную форму. В этом случае понятие "граничное условие по конкретной переменной" в принципе теряет смысл. Таким образом, указанный выше принцип постановки граничных условий нуждается в корректировке.

Для прояснения смысла краевого условия (15.3) рассмотрим частный случай, когда область Ω является двумерной и представляет собой прямоугольник (см. рис. 64). Тогда граница S состоит из четырех сторон прямоугольника, на каждой из которых согласно соотношению (15.3) задается значение функции состояния. Таким образом, для прямоугольника соотношение (15.3) распадается на четыре независимых граничных условия, что соответствует указанному выше приему. Таким образом, в том случае, когда рассматриваемая область является прямоугольной (в трехмерном случае – параллелепипедом) одно граничное условие (15.3) соответствует необходимому количеству граничных условий по каждой переменной. Однако, что является весьма существенным, оно имеет смысл и для областей общего вида.

Вместо соотношения (15.3) может быть задано условие второго рода

 на *S* . (15.4)

где ∂/∂*n* – производная по направлению внешней нормали к поверхности *S* (см. рис. 65). В частности, для стационарного теплопереноса величина ψ = ϕ/ , где  – коэффициент теплопроводности, представляет собой тепловой поток через границу *S*. Уравнения Лапласа или   
Пуассона с условием второго рода составляют *задачу Неймана***.**



Рис. 64. Граница *S* включает в себя стороны прямоугольника,

соотношение (15.3) распадается на четыре граничных условия.

****

Рис. 65. Направления внешней нормали к поверхности *S*.

В зависимости от физического смысла задачи возможны и другие типы краевых условий. Кроме того, допустимы и смешанные граничные условия, при которых, например, на одной части границы задается условие первого рода, а на другой – второго.

Описанные краевые задачи называются *внутренними* поскольку рассматриваются процессы, протекающие внутри рассматриваемой области. Имеют смысл и *внешние краевые задачи*,в которых исследуется поведение системы вне данной области (см. рис. 66). Такие задачи возникают, например, при изучении обтекания некоторого тела потоком жидкости или газа.



Рис. 66. Внутренняя и внешняя задачи.



Рис. 67. Переход к сферическим координатам.

## 5. СФЕРИЧЕСКИЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

При решении конкретных задач в ряде случаев имеет смысл   
перейти от декартовых координат к каким-либо другим. Чаще всего применяются сферические и цилиндрические координаты.

Для перехода к *сферическим координатам*выполняется   
следующее преобразование независимых переменных:



Сферические координаты включают в себя радиальную составляющую *r* – расстояние от данной точки до начала координат и два угла θ и ϕ (см. рис. 67).

Запишем оператор Лапласа в сферических координатах. Для этого найдем производную





Рис. 68. Переход к цилиндрическим координатам.

Аналогичным образом находятся производные по другим независимым переменным, а затем – вторые производные. В результате установим вид оператора Лапласа в сферических координатах



Таким образом, уравнение Лапласа в сферических координатах записываются следующим образом:

 . (15.5)

*Цилиндрические координаты*задаются преобразованиями

 . (15.6)

Они характеризуются декартовой координатой *z*, направленной по оси цилиндра, координатой *r*, соответствующей расстоянию от данной точки до оси цилиндра, и угловой координаты ϕ (см. рис. 68).

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат записывается следующим образом:

 .

Тогда уравнение Лапласа в цилиндрических координатах характеризуется соотношением

 . (15.7)

Возникает естественный вопрос, какой смысл переходить   
от достаточно простого уравнения Лапласа (15.2) в декартовых координатах к существенно более громоздким уравнениям с переменными коэффициентами (15.6) и (15.7)? Для ответа на этот вопрос рассмотрим два несложных примера.

## 6. ПОТЕНЦИАЛ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое зарядом, сосредоточенным в некоторой точке. Выберем систему координат, поместив ее начало в эту точку. Если окружающая среда является однородной, то потенциал электрического поля будет удовлетворять уравнению Лапласа.

В силу однородности пространство распространения электрического поля в любом направлении от заряда будет одинаковым. Это означает, что рассматриваемое явление обладает угловой или сферической симметрией, т.е. потенциал электрического поля в конкретной точке зависит исключительно от расстояния от этой точки до начала координат, где располагается заряд. Следовательно, любая сферическая поверхность с центром в начале координат будет*эквипотенциальной поверхностью*, т.е. характеризоваться единственным значением потенциала.

Приведенные рассуждения указывают на целесообразность перехода от декартовых координат к сферическим в соответствии с соотношениями (15.4). При этом функция *u* в силу сферической симметрии системы не зависит от угловых координат θ и ϕ. Тогда в уравнении Лапласа в сферических координатах (15.6) обращаются в нуль производные по угловым координатам. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

 . (15.8)

Интегрируя это равенство, будем иметь

 .

где *с*1 – произвольная постоянная. Выполняя повторное интегрирование, находим функцию

 , (15.9)

где *с*2 – некоторая константа.

Формула (15.9) дает общее решение уравнения (15.8). Для получения искомого частного решения следует задать некоторую дополнительную информацию. Прежде всего, отметим, что по мере удаления от рассматриваемого заряда электрической поле ослабевает и должно сходить на нет на достаточно большом расстоянии от него. Это означает, что при *r* → ∞ потенциал электрического поля должен стремиться к нулю. Обеспечение этого свойства требует задания координаты *с*2 = 0 . Учитывая положительность потенциала, заключаем, что константа *с*1 должна быть отрицательной. В частности, полагая *с*1 = -l , получаем равенство

 . (15.10)

Формула (15.10) определяет потенциал поля, образованного единичным зарядом, расположенным в начале координат. В общем случае значение константы *с*1 здесь определяется величиной заряда, создающего электрическое поле. Согласно полученным результатам потенциал электрического поля точечного заряда в произвольной точке обратно пропорционален расстоянию от этой точки до заряда (см. рис. 69).



Рис. 69. Изменение потенциала поля точечного заряда.

Приведенный пример показывает эффективность перехода к новым независимым переменным. Пользуясь сферической симметрией исследуемой системы, мы перешли от уравнения Лапласа с тремя пространственными координатами к обыкновенному дифференциальному уравнению (15.8). В результате было найдено решение рассматриваемой задачи в трехмерном случае.

## 7. ПОТЕНЦИАЛ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДА

Рассмотрим теперь электрическое поле, создаваемое тонким бесконечным равномерно заряженным проводом. В случае однородности электропроводящей среды потенциал поля вновь описывается уравнением Лапласа. Будем полагать, что декартова координата *z*   
направлена вдоль провода.

Очевидно, потенциал поля равномерно заряженного провода будет изменяться одинаково в любом направлении от провода и остается неизменным на любом участке его длины. Таким образом, потенциал поля в произвольной точке зависит исключительно от расстояния от этой точки до провода. Следовательно, эквипотенциальными поверхностями в данном случае будут боковые поверхности всевозможных цилиндров, осью которых является рассматриваемый провод (т.е. ось *z*). В этой связи имеет смысл перейти к цилиндрическим координатам в соответствие с формулами (15.6).

При рассмотрении уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (15.7) следует учесть цилиндрическую симметрию системы. Это означает, что производные от функции *u* по переменным ϕ и *z* равны нулю. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

 . (15.11)

Интегрируя это равенство, получаем

 ,

где *с*1 – произвольная постоянная. Повторное интегрирование приводит к равенству

 , (15.12)

где *с*2 – некоторая координата.



Рис. 70. Изменение потенциала поля бесконечного провода.

Формула (15.12) дает общее решение уравнения (15.11). Как и в случае исследования поля точечного заряда отметим, что потенциал поля должен убывать по мере удаления от провода и стремится к нулю при *r* → ∞ . Это приводит к равенству *с*2 = 0 . Конкретное значение параметра *с*1 зависит от заряда провода, а точнее его плотности заряда, т.е. заряда единицы его длины. В частности, полагая при этом *с*1 = -l , получаем равенство

 , (15.13)

характеризующее потенциал электрического поля, образованного проводом единичной плотности заряда. Согласно полученным результатом потенциал убывает с ростом расстояния от провода (см. рис. 70).

Как и в предшествующем случае в результате перехода к новым независимым переменным удалось существенно упростить вид математической модели, получив обыкновенное дифференциальное уравнение (15.11). Таким образом, в тех случаях, когда исследуемая система обладает некоторой симметрией, целесообразно перейти к новым независимым переменным, согласованным с данным видом симметрии. На практике замену переменных проводят также и при отсутствии ярко выраженной симметрии с целью получения задачи в области   
более простой структуры.

## КОММЕНТАРИИ

Рассмотренные выше уравнения в теории уравнений с частными производными относят к *эллиптическому типу*.Более подробно эти вопросы излагаются в курсах уравнений математической физики (см., например,   
В.С. Владимиров [19], С.Г. Михлин [91], А.Н.Тихонов и А.А. Самарский [129] С.Фарлоу [132]). Каноническая форма уравнения эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

 .

Дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

Одномерным аналогом краевой задачи для уравнения эллиптического типа является краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения.

В отличие от задачи Дирихле, задача Неймана обладает рядом необычных свойств. Даже в одномерном случае (т.е. на уровне второй краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка) легко убедиться, что задача Неймана для уравнения Лапласа имеет своим решением произвольную постоянную, т.е. отсутствует единственность решения. В то же время для разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона требуется дополнительное ограничение на свободный член уравнения (необходимо, чтобы интеграл от этой функции по границе рассматриваемой области равнялся нулю).

Уравнения эллиптического типа соответствуют положениям равновесия для систем с распределенными параметрами. В частности, если решение уравнения параболического типа выходит на некоторое стационарное состояние, то последнее описывается эллиптическим уравнением. Собственно, с этой ситуацией мы уже сталкивались при выводе уравнения стационарного теплопереноса. Однако важно отметить, что подобная ситуация наблюдается и в общем случае.

Краевые задачи для рассматриваемых уравнений соответствуют уравнениям Эйлера для некоторых функционалов, представленных интегралами по всей длине области (см. лекция № 10).

Вопросы электростатики рассматриваются, например, в книгах   
С. Г. Калашникова [41] и И. Е. Тамма [127].

Формулы (15.10) и (15.13) определяют *фундаментальные решения* уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости, широко используемые в математической физики [19], [91], [129].

Для исследования краевых задач для уравнений Лапласа или Пуассона применяются методы Фурье, Галеркина, вариационный метод и др. [19], [91], [129], [132]. Более сложные уравнения, как правило, решаются численно (см., например, А. А. Самарский [118]).

# Лекция № 16 КОРРЕКТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*Я богословьем овладел,*

*Над философией корпел,*

*Юриспруденцию долбил*

*И медицину изучил.*

*Однако я при всем при том*

*Был и остался дураком.*

Иоганн Вольфганг ГЕТЕ

Мы уже изучили разнообразные классы математических моделей, описывающих различные явления природы и общества. После всего этого   
возникает естественный вопрос, какие же общие математические требования должны быть предъявлены к получаемым задачам? Обычно предполагают, что исследуемая математическая модель будет корректной в том смысле, т.е. решение задачи должно существовать, быть единственным и непрерывно зависеть от параметров системы. Для достижения единственности решения к имеющимся дифференциальным уравнениям состояния добавляют соответствующее количество начальных и граничных условий. Требование непрерывной зависимости решения от параметра вынуждает расставлять эти дополнительные условия лишь там, где это действительно допустимо.

К сожалению, эти естественные рекомендации еще не гарантируют   
получение желаемых результатов. Часто, разумно поставленная, на первый взгляд, задача оказывается не разрешимой. Решение имеющейся задачи подчас оказывается не единственным. Существующее решение не обязательно непрерывно зависит от параметров процесса. Чрезвычайно важным будет то обстоятельство, что некорректные задачи реально существуют, причем встречаются они достаточно часто. И, что самое главное, они могут иметь глубокий физический смысл. Таким образом, отсутствие корректности в ряде случаев оказывается не недостатком, а достоинством рассматриваемой математической   
модели.

В данной лекции приводятся различные типы некорректных задач для дифференциальных уравнений. Приводятся примеры неразрешимых задачи, задачи с локальной, но не глобальной разрешимостью, неоднозначно разрешимые задачи и отсутствие непрерывной зависимости решения от параметров системы. Они связаны с задачей Коши и краевыми задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Исследуются задачи Эйлера и Бенара, для которых отсутствие единственности   
решения согласуется с естественным физическим смыслом описываемого   
явления.

В приложении приводятся краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, имеющие существенно не единственное решение.

## 1. ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как мы уже знаем, великое множество процессов окружающего мира описываются дифференциальными уравнениями. В этой связи было бы интересно выяснить, какими свойствами, в принципе, могут обладать соответствующие математические модели. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения общего вида

 (16.1)

где *u*0 – некоторое число, а *f* – известная функция своих аргументов. Покажем, что в зависимости от специфических особенностей параметра *u*0 и функции *f* эта задача может обладать всякого рода неприятными свойствами.

Определим параметры задачи следующим образом:

 . (16.2)

Предположим, что какая-то функция *u* = *u*(*t*) является решением задачи (16.1), (16.2). Рассмотрим некоторый интервал времени (0,*T*) , где эта функция непрерывная и не меняет знак. Если функция *u* не отрицательна, то, исходя из вида уравнения и функции *f*, установим, что ее производная равна -1 для всех *t*∈(0,*T*) . Таким образом, в сколь угодно малой окрестности нуля функция *u* должна убывать. Тогда, учитывая равенство *u*(0) = 0 , заключаем, что эта функция непременно станет отрицательной, что противоречит предположению о поведении функции *u* (см. рис. 71 а). Если же функция *u* отрицательна на интервале (0,*T*) (см. рис. 71 б), то ее производная равна единице, т.е. сама функция должна возрастать. Однако, возрастающая функция, удовлетворяющая условию *u*(0) = 0 , не может быть отрицательной. Тем самым мы вновь приходим к противоречию. В результате заключаем, что   
задача Коши (16.1), (16.2) *не может обладать решением*, являющимся непрерывной функцией даже на сколь угодно малом интервале времени.

Установленный результат связан с разрывностью правой части уравнения. Однако и в отсутствии явных разрывов можно столкнуться с аналогичной ситуацией. Пусть справедливы равенства

*u*0 = 1 , *f*(*t*,*u*) = 1/*t* . (16.3)

Если существует решение задачи Коши (16.1), (16.3), то оно равно единице в нуле и сколь угодно быстро возрастает в сколь угодно малой окрестности нуля. Естественно ни одна нормальная функция не может обладать такими свойствами. В результате заключаем, что и в данном случае решение задачи *не существует*.



Рис. 71. Направления фазовой скорости и изменения функции *u*не совпадают.

Возникшие неприятности обусловлены неограниченностью   
свободного члена уравнения в окрестности нуля. Однако отсутствие как неограниченности, так и разрывов, еще не застраховывает нас от появления неожиданных ситуаций. Определим значения

*u*0 = 1 , *f*(*t*,*u*) = *u* 2 . (16.4)

Нетрудно убедиться, что решение задачи (16.1), (16.4) задается формулой

 .

Очевидно, при *t* → 1 это решение неограниченно возрастает (см. рис. 72). Таким образом, решение задачи (16.1), (16.4) существует лишь при *t* < 1 . В этом случае говорят, что задача Коши имеет только *локальное решение*. Если же решение задачи существует на любом интервале времени, то его называют *глобальным*. В данном случае глобальное решение отсутствует.



Рис. 72. Задача (16.1), (16.4) имеет лишь локальное решение.



Рис. 73. Множество решений задачи (16.1), (16.5) бесконечно.

И уж совсем неожиданный результат наблюдается при значениях параметров

 . (16.5)

Нетрудно убедиться, что функция



для любого неотрицательного τ будет решением задачи (16.1), (16.5) (см. рис. 73). Таким образом, данная *задача имеет бесконечное*   
(и даже не счетное) *множество решений*.

Итак, задача Коши (16.1) может иметь решение, а может его и не иметь. Существующее решение может оказаться как глобальным, так и локальным. Если решение существует, то оно не обязательно единственно. Отметим, что о единственности глобального решения задачи можно говорить наверняка в линейном случае (в том числе для систем линейных дифференциальных уравнений). В нелинейном же случае, особенно в условиях неограниченности и разрывности функции *f* можно столкнуться с различного рода неприятностями. При этом надо иметь в виду, что именно эти неприятности оказываются правилом, а всевозможные "хорошие" свойства – приятным исключением. Так уж устроен мир…

Если исследуемый процесс действительно описывается уравнениями, обладающими некоторыми "нехорошими" свойствами, то это может означать, что сам процесс связан с определенными особенностями. В частности, поведение системы, изображенное на рис. 72,   
может быть связано с явлением взрыва, когда на малом интервале   
времени характеристики процесса меняются чрезвычайно быстро, после система изменяется настолько, что имеющаяся модель уже не способна ее описывать. Если задача имеет не единственное решение, то, возможно, на самом деле существуют различные варианты эволюции системы. Таким образом, сингулярные свойства дифференциальных уравнений могут быть обусловлены сингулярностью самого процесса.

## 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обратимся теперь к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений, которые также возникают на практике   
(в частности, при описании стационарных процессов или при решении вариационных задач). Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

*u*''(*x*) + *a* *u*(*x*) = 1 , 0 < *x* < π (16.6)

с однородными граничными условиями первого рода

*u*(0) = 0 , *u*(π) = 0 , (16.7)

где *а* – числовой параметр, считающийся положительным, *u*" = *d*2*u*/*dx*2 .

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородного уравнения получается в виде суммы общего решения однородного решения однородного уравнения и частного решения однородного уравнения. Соотношению (16.6) соответствует однородное уравнение

*u*'' + *a**u* = 0 ,

напоминающее уравнение гармонического осциллятора. Его общее решение определяется по формуле

*u*(*x*) = *c*1 sin (√*a x*) + *c*2 cos (√*a x*) ,

где *c*1 , *c*2 – произвольные постоянные. Частное решение уравнения (16.6) удобнее всего искать в виде константы. Очевидно, она равна

*u*(*x*) = 1/*a* .

Таким образом, общее решение уравнения (16.6) имеет вид

*u*(*x*) = *c*1 sin (√*a x*) + *c*2 cos (√*a x*) + 1/*a* , (16.8)

Для нахождения конкретных значений констант *c*1 и *c*2 следует   
воспользоваться граничными условиями (16.7). Попробуем найти эти значения для разных коэффициентов *а*. При *а* = 2 формула (16.8) принимает вид

*u*(*x*) = *c*1 sin (√2 *x*) + *c*2 cos (√2 *x*) + 1/2 .

Полагая *х* = 0 и *х* = π и пользуясь соотношениями (16.7), установим систему двух линейных алгебраических уравнений

 ,

откуда можно однозначно найти константы *c*1 и *c*2 , а значит, определить единственное решение исследуемой краевой задачи.

При *а* = 1 формула (16.8) принимает вид

*u*(*x*) = *c*1 sin *x* + *c*2 cos *x* + 1 .

Тогда граничные условия приводят к равенствам

 .

Естественно, эти соотношения не могут выполняться одновременно. Следовательно, в данном случае исследуемая краевая задача не может иметь решения.

Наконец, при *а* = 4 равенство (16.8) записывается следующим образом

*u*(*x*) = *c*1 sin 2*x* + *c*2 cos 2*x* + 1/4 .

Пользуясь соотношениями (16.7), получаем равенства

 .

Отсюда можно найти константу *с*2 = - 1/4 . Однако величина *с*1 так и остается не определенной. Таким образом, функция

*u*(*x*) = *c*1 sin 2*x* + (1 – cos 2*x*)/4 .

для любого значения *с*1 будет решением краевой задачи (16.6), (16.7) при *а* = 4 .

Итак, в зависимости от значений параметра *а*, исследуемая краевая задача может оказаться как разрешимой, так и не разрешимой. Существующее решение может быть как единственным, так и не единственным. Мы видим, что для трех различных целых значений коэффициента, входящего в рассматриваемое уравнение, задача обладает качественно разными свойствами. На практике коэффициенты уравнений связаны с условиями протекания процесса. Тем самым, если   
поставленная задача действительно описывает какое-то реальное явление, то оказывается, что при определенных условиях процесс вообще не идет, а при других условиях возможны различные варианты развития событий.

Еще более интересными свойствами обладают краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений (см., в частности,   
приведенную ниже задачу Эйлера, а также приложение).

## 3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Обратимся теперь к уравнениям с частными производными. Мы ограничимся рассмотрением уравнения теплопроводности, которое, как мы уже знаем, описывает широкий класс разнообразных явлений. Пусть дано уравнение

*vt*= *vxx* + *f*(*t*,*v*) , 0 < *x* < *L* , *t* > 0 (16.9)

с начальным условием

*v*(*x*,0) = *u*0 , 0 < *x* < *L* (16.10)

и однородными граничными условиями второго рода

*vx(*0,*t*) = 0 , *vx*(*L*,*t*) = 0 , *t* > 0 (16.11)

где *u*0 – некоторая константа, а *f* – известная функция своих аргументов.

Определим функцию *v* с помощью равенства

*v*(*x*,*t*) = *u*(*t*) , 0 < *x* < *L* , *t* > 0 ,

где *u* есть решение системы



т.е. задачи Коши (16.1). Очевидно, производная *vx* равна нулю. Тогда соотношения (16.11) выполняются тривиально, а условия (16.9), (16.10) сводятся к задаче (16.1). Таким образом, любое решение задачи Коши (16.1) оказывается решением краевой задачи (16.9) – (16.11). Следовательно, все установленные ранее свойства задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения можно наблюдать и для поставленной краевой задачи при соответствующем выборе *u*0 и *f*.

Рассмотрим теперь уравнение

*vt*= *vxx* + *a* *v* – 1 , 0 < *x* < π , *t* > 0 (16.12)

с начальным условием

*v*(*x*,0) = *v*0(*x*) , 0 < *x* < π (16.13)

и однородными граничными условиями первого рода

*v*(0,*t*) = 0 , *v*(π,*t*) = 0 , *t* > 0 , (16.14)

где *а* – некоторая положительная константа, а *v*0 – известная функция.

Предположим, что решение задачи (16.12) – (16.14) выходит при *t* → ∞ на некоторое стационарное состояние *u*, т.е. справедливо соотношение



Тогда производная *vt* стремится к нулю, а предельная функция *u*оказывается решением системы

*u*''(*x*) + *a* *u*(*x*) = 1 , 0 < *x* < π;*u*(0) = 0 , *u*(π) = 0 ,

т.е. краевой задачи (16.6), (16.7).

При *а* = 2 эта задача имеет единственное решение. В этом случае для любого начального состояния *v*0 решением системы (16.12) – (16.14) выходит в единственное положение равновесия. При *а* = 1 задача (16.6), (16.7) вообще не имеет решения, а значит, исследуемая система не выходит на равновесное состояние из-за отсутствия   
последнего. Наконец, при *а* = 4 краевая задача (16.6), (16.7) имеет бесконечное множество решений, каждое из которых будет положением равновесия исходной системы. Выход состояния системы на конкретное положение равновесия определяется значением начального состояния *v*0 . Итак, если рассматриваемая краевая задача действительно описывает какое-то явление природы, то в зависимости от значений одного из параметров системы (т.е. от условий протекания процесса) эволюция системы на больших интервалах времени может происходить качественно разными способами.

## 4. ПРИМЕР АДАМАРА

При исследовании задач математической физики можно столкнуться с еще одной серьезной неприятностью. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

*uxx* + *uyy* = 0 . (16.15)

на полуплоскости, определяемой неравенством *у* > 0 . Зададим два граничных условия по переменной *у*

*u*(*x*,0) = *k* -1 sin *kx* , *uy*(*x*,0) = 0 , (16.16)

где *k* > 0 – параметр задачи. Поскольку независимаяпеременная *х*может принимать любое действительное значение, уравнение (16.15) не нуждается в граничных условиях по этому аргументу.

Соотношения (16.15), (16.16) составляют задачу Коши для уравнения Лапласа. Можно убедиться, что эта задача для любого значения параметра *k* имеет единственное решение, определяемое по формуле



Если в равенствах (16.16) перейти к пределу при *k* → ∞ то   
получаются условия

*u*(*x*,0) = 0 , *uy*(*x*,0) = 0 , (16.17)

Задача (16.15), (16.17) также имеет единственное решение *u*∞ = 0 .

Полученные результаты не вызывают сомнений и, казалось бы, не предвещают каких-либо неприятностей. Однако при *k* → ∞ последовательность {*uk*} решений задачи (16.15), (16.16) не сходится к функции *u*∞ . При достаточно больших значениях параметра *k* задачи (16.15), (16.16) и (16.15), (16.17) различаются на сколь угодно малую величину в краевых условиях. В то же время соответствующие решения весьма далеки друг от друга. Таким образом, в задаче Коши для уравнения Лапласа *отсутствует непрерывная зависимость решения от данных на границе*  *у* = 0 .

Естественно задаться вопросом, какие неприятности возникают в подобной ситуации при решении прикладных задач? Дело в том,   
что на практике параметры процесса (в частности, граничные данные) неизменно определяются с некоторой погрешностью. Если решение задачи непрерывно зависит от параметров процесса или, как говорят, *устойчиво по параметрам*, то малая погрешность эксперимента вызывает малую же погрешность в решении задачи. В отсутствии этого свойства возможны существенные искажения результатов.

Действительно, предположим, что граничные условия (16.17) соответствуют истинному состоянию системы на границе, а соотношения (16.16) характеризуют результаты эксперимента. При достаточно большом значении *k* эти соотношения сколь угодно близки, что   
характеризует высокую точность эксперимента. Однако при анализе модели вместо истинного значения функции состояния *u*∞ мы получим весьма далекое от нее значение *uk* . Естественно, в этом случае результаты математического моделирования не будут иметь никакого практического значения. Таким образом, при решении задач математической физики устойчивость решения по параметру крайне желательна.

Отталкиваясь от примера Адамара, приходим к понятию   
корректности задачи. Задача является *корректной*, если она имеет   
решение, которое единственно и непрерывно зависит от параметров процесса. Обычно устойчивость решения по параметрам достигается соответствующей расстановкой граничных условий.

Все рассмотренные в предшествующих лекциях задачи математической физики были корректными. Пример Адамара говорит о некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа. Некорректными оказываются и краевые задачи для уравнений теплопроводности или колебания струны, в которых два граничных условия заданы на одном конце тела. Для уравнения теплопроводности не корректна задача с известными значениями функции состояния в конечный (а не начальный) момент времени.

До сих пор мы рассматривали абстрактные системы. Может создаться впечатление, что в задачах, имеющих практическое   
значение, подобного рода неприятности не возникают. Ниже будут   
рассмотрены две системы, имеющие явный физический смысл и обладающие весьма специфическими свойствами.

## 5. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Рассматривается тонкий упругий неоднородный стержень   
единичной длины. Предположим, что один конец стержня закреплен, а на другой действует сила *F*, сжимающая стержень (см. рис. 74 а). Введем координатную ось *х*, направленную вдоль стержня, с началом координат в его закрепленной точке. Функцией состояния системы будет отклонение *u* = *u*(*x*) стержня от положения равновесия, соответствующего координатной оси.

Можно показать, что функция состояния системы будет удовлетворять следующему нелинейному дифференциальному уравнению

 (16.18)

где ρ = ρ(*x*) – плотность стержня, являющаяся известной непрерывной положительной функцией, а μ – параметр процесса (положительный),



Рис. 74. Задача Эйлера имеет не единственное решение.

пропорциональный силе *F*. Уравнение (16.18) дополняется граничным условием

*u*(0) = 0 , *u*(*t*) = 0 . (16.19)

Очевидно, задача (16.18), (16.19) наверняка имеет тривиальное решение, тождественно равное нулю. Таким образом, под действием силы *F* стержень, в принципе, может остаться в естественном состоянии. Можно показать, что при достаточно малых значениях параметра μ других решений и не существует. Однако если число μ превышает некоторое критическое значение μ', то задача будет иметь и положительное решение (см. рис. 74 б). Таким образом, стержень будет выгибаться под действием относительно большой силы. Отметим, что если функция *u*1 будет решением задачи (16.18), (16.19), то решением оказывается и функция *u*2 , отличающаяся от *u*1 лишь знаком. Следовательно, выгибание стержня может происходить как в положительном, так и в отрицательном направлении. Итак, если при μ ≥ μ' *краевая задача имеет три решения* – положительное, отрицательное и нулевое.

Этот результат может вызвать определенное недоумение. В данном случае исследуется реально существующее явление. С одной стороны, у нас есть уверенность, что краевая задача (16.18), (16.19) с некоторой степенью точности описывает состояние системы. С другой стороны, она имеет заведомо не единственное решение. В то же время мы в силах поставить натурный эксперимент и замерить положение стержня при соответствующем значении действующей силы. Естественно, результатом эксперимента будет какое-то конкретное положение стержня, но никак не три сразу. В результате возникают серьезные сомнения в адекватности модели реальному объекту исследования.

Тем не менее, мы убеждены в том, что рассматриваемая модель действительно описывает исследуемую систему. В частности, поставив эксперимент, мы зафиксируем конкретное положение стержня, которое с достаточно большой степенью точности совпадает с каким-либо решением задачи (16.18), (16.19). Однако, поставив эксперимент во второй раз, при тех же самых условиях мы можем наблюдать иное положение стержня, соответствующее другому решению краевой   
задачи. Имея достаточно большое количество экспериментальной   
информации, мы отметим, что примерно в половине случаев стержень выгибается вниз, а в половине – вверх. Третье решение краевой задачи (тривиальное) при больших значениях силы характеризует неустойчивое состояние стержня, которое практически не реализуется.

Результаты эксперимента показывают, что при данных условиях *система может находиться в двух состояниях*, которые являются решениями краевой задачи. Однако ни натурный эксперимент, ни   
анализ математической модели не могут предсказать, какое из этих   
состояний будет реализовано в результате конкретного единичного опыта. Оба возможных состояния достигаются с равной вероятностью. Таким образом, рассматриваемый стационарный процесс сам по себе не является детерминированным. Аналогичными свойствами обладает и характеризующая его математическая модель. Следовательно, неоднозначная разрешимость рассматриваемой краевой задачи является достоинством модели, поскольку это свойство отвечает физическому смыслу исследуемой системы.

С ситуацией, аналогичной описанной выше, мы встретимся в рассматриваемой ниже задаче Бенара, а также в приведенной в приложении задачи Чэфи – Инфанте.

## 6. ЗАДАЧА БЕНАРА

Рассматривается слой жидкости, находящийся в гравитационном поле между двумя бесконечными параллельными пластинами   
(см. рис. 75 а). Предположим, что на нижней пластине поддерживается температура *u*1 , а на верхней – *u*2 , причем *u*1 > *u*2 . Состояние исследуемой системы характеризуется температурой и вектором скорости и описывается соответствующими уравнениями. Если разность температур между пластинами достаточно мала, а расстояние между ними сравнительно велико, то рассматриваемая система уравнений в   
стационарном состоянии имеет единственное решение. При этом   
скорость жидкости равна нулю, а температура постепенно меняется   
от величины *u*1 в нижней части слоя жидкости до значения *u*2 в его верхней части (рис. 75 б). При сравнительно большой разности температур между пластинами и малой толщиной слоя жидкости ситуацию существенно изменяется.

Известно, что при нагревании тела расширяются, т.е. увеличиваются в объеме. Это означает, что плотность вещества при нагревании уменьшается. Учитывая имеющуюся разность температур между пластинами, заключаем, что верхние слои жидкости оказываются   
более плотными, а нижние – менее плотными.



Рис. 75. Слой жидкости между двумя нагретыми пластинами.

Молекулы жидкости находятся в постоянном хаотическом движении. Вследствие этого какая-то часть молекул верхнего слоя может оказаться ниже – в более легком слое. Из-за разности в плотности эта капля жидкости будет обладать большим весом по сравнению с соседними каплями на том же уровне. Если разность в весе оказывается достаточно большой (это наблюдается как раз при большой разности температур между пластинами и малой толщине слоя жидкости), то капля проваливается вниз (см. рис. 76 а). С другой стороны, в нижней части какая-то капля жидкости может оказаться выше, в более плотном слое. В этой связи согласно закону Архимеда на нее будет действовать выталкивающая сила, направленная вверх. Под действием этой силы горячие капли могут всплывать (см. рис. 76 б).



Рис. 76. Образование конвективных потоков жидкости.

Итак, при определенных условиях в слое возникают конвективные потоки, т.е. потоки тепла, обусловленные механическим движением жидкости. В результате происходит циркуляция жидкости. По ее длине образуются изолированные ячейки циркулирующей жидкости, называемые *ячейками Бенара* (см. рис. 77). Этот эффект наблюдается как при исследовании математической модели, так и экспериментально. В зависимости от значений параметров процесса с достаточно большой точностью можно предсказать появление ячеек Бенара и даже их размеры. Однако ни натурный, ни численный эксперимент, к сожалению, не позволяют предугадать направление циркуляции жидкости в конкретной ячейке. Различным решениям рассматриваемой системы уравнений соответствуют ячейки с разными направлениями циркуляции.

Характерно, что, как и в предшествующем примере, рассматриваемая модель допускает и тривиальное решение, при котором циркуляция вообще отсутствует. Однако в условиях существования нетривиального решения нулевое состояние системы соответствует неустойчивому положению равновесия соответствующей нестационарной задачи и на практике не реализуется.

Рассмотренные задачи Эйлера и Бенара говорят о том, что неоднородность решения исследуемых систем возможна и в прикладных задачах. Это свойство не является признаком несовершенства модели, а, напротив, отражает особенности окружающего мира, никак не отличающегося полной детерминированностью.



Рис. 77. Возникновение ячеек Бенара.   
Циркуляция жидкости может происходить в двух направлениях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Ранее мы убедились, что краевые задачи для дифференциальных уравнений обладают не тривиальными свойствами. Однако еще более удивительными свойствами обладают задачи, определяемые нелинейными уравнениями. Ниже приводятся две такие задачи, одна из которых имеет бесконечное число решений, а число решений второй задачи определяется коэффициентом уравнения.

### **1. Нелинейная краевая задача.**

Рассматривается уравнение

 (16.20)

с однородными граничными условиями

*u*(0) = 0 , *u*(*t*) = 0 . (16.21)

Можно показать, что краевая задача (16.20), (16.21) имеет бесконечное множество решений. В частности, сначала доказывается существование ненулевого решения *u*1 этой задачи. Затем определяется функция

*zk**= zk* (*t*) = *k u*1(*kt*) , *t*∈(0,1) ,

где *k* – произвольное натуральное число.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция *uk* , определяемая по формуле



оказывается решением задачи (16.20), (16.21). Решения рассматриваемой   
краевой задачи изображены на рис. 78.

### **2. Задача Чэфи - Инфанте.**

Рассматривается уравнение

 (16.22)

с однородными граничными условиями

*u*(0) = 0 , *u*() = 0 , (16.23)

где  и  – положительные константы. Соотношения (16.22), (16.23) называются *задачей Чэфи – Инфанте*. Можно показать, что при выполнении   
неравенства(*k*-1)2 ≤*k*2 задача Чэфи – Инфанте имеет ровно 2*k*-1 решений, где *k* – произвольное натуральное число. Столь удивительный характер зависимости числа решений от коэффициента уравнения не может не взывать удивления.



Рис. 78. Решения задачи (16.20), (16.21).

Критические значения параметра , при которых меняется число   
решений задачи, называют *точками бифуркации*. В данном случае таковыми являются значения *k**k*2. С явлением бифуркации мы фактически уже сталкивались ранее при рассмотрении задач Эйлера и Бенара.

## КОММЕНТАРИИ

В приведенных примерах несуществования решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений заведомо нарушает условие теорем Пикара или Пеано (см. например, Ф. Хартман [140]). Характерно, что эти теоремы гарантируют существование лишь локального, но не глобального решения задачи Коши.

К системе дифференциальных уравнений, имеющих лишь локальное, но не глобальное решение приводят цепные химические реакции (см., например, Б. Льюис и Г. Эльбе [72], Л. Н. Хитрин [144]). При этом математическая модель описывает исследуемый процесс лишь до момента взрыва.

Вопросы разрешимости задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются, например, в монографиях Э.А. Коддингтона, Н. Левинсона [49] и Ф. Хартмана [140]; линейных задач математической физики – у В. С. Владимирова [19] и С. Г. Михлина [91], нелинейных задач математической физики – у Ж. -Л. Лионса [68].

Для рассмотренной линейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка отсутствие однозначной разрешимости соответствует случаю, когда параметр уравнения является собственным числом соответствующего оператора. Со спектральной теорией операторов можно познакомиться, например, в книге В. Хатсона и Дж. Пима [141].

Более тонкие примеры неединственного решения или неглобального существования решения для нелинейных уравнений с частными производными приводятся Ж. -Л. Лионсом [69] и Д. Хенри [142]. В частности, краевая задача (16.17), (16.18) (в многомерном случае) рассматривается в [69], а задача Чэфи – Инфанте – в [142]. Теория бифуркаций рассматривается, например, в монографиях Ж. Йосса и Д. Джозефа [40], В. Хатсона и Дж. Пима [141],   
Д. Хенри [142].

Наличие неединственности решения задачи является свидетельством отсутствия детерминированности рассматриваемой системы (см. лекция № 4). В этом направлении математическое моделирование соприкасается с *теорией вероятности*, изучающей явления случайного характера. Так, при подбрасывании монеты существует две возможные реализации состояния системы. Ситуации здесь совершенно аналогична той, которая возникает в задачах Эйлера или Бенара. Учитывая огромное влияние случайных явлений в окружающем нас мире, можно прийти к выводу о том, что неединственность решения должна достаточно часто встречаться на практике.

Вероятные свойства математических моделей принципиально иной природы проявляется в задачах квантовой механики (см. лекция № 17).

Неединственность решения математических моделей является формой проявления относительной, но не абсолютной познаваемости окружающего мира. Анализируя достаточно сложную нелинейную модель, мы можем указать ее возможные решения, т.е. предсказать допустимые реализации состояния системы. Мы знаем, что при подбрасывании монеты возникает либо "орел", либо "решетка", что при определенном воздействии на стержень он будет выгибаться, что при определенных условиях в слое жидкости возникают ячейки Бенара определенных размеров. Однако заранее предугадать, какой стороной упала монета, в какую сторону выгибается стержень, в каком направлении циркулирует жидкость, мы в принципе не можем.

Неединственность допустимых состояний системы имеет еще одну важную сторону. Если бы решение задачи было бы всегда единственно, если бы в любой практической ситуации было бы возможно лишь одно состояние системы, то мир оказался бы строго детерминированным. В таком мире все было бы заранее предопределено. В этих условиях не оставалось бы места для свободы человеческой воли. Только наличие неединственности решения позволяет нам реализовать свой выбор одного состояния из некоторого числа возможных, и отвечать за свои поступки. В строго детерминированном мире ни о каком выборе не может быть и речи. Фактически там нет места для человеческого разума, поскольку думать, по существу, не о чем.

Еще один аспект неединственности решения задачи связан с проблемой ее численного решения. Естественно, при численном решении задачи мы получаем какое-либо одно решение (при условии, что применяемый нами алгоритм достаточно эффективен). Получение конкретного решения из нескольких возможных обусловлено особенностями применяемого алгоритма. В частности, в случае применения итерационных методов решении задачи возможно, что при одних начальных приближениях мы наблюдаем одно решение, а при других - другое.

В отличие от уравнения теплопроводности, уравнение колебания струны с конечными (а не начальными) состояниями дает корректную задачу математической физики. Если процесс теплопроводности сопровождается ростом энтропии и, следовательно, не обратим во времени, то колебание струны (без учета трения и т.п.) происходит при неизменной энтропии. Во втором случае за математической моделью стоит некоторая динамическая группа преобразований (см. лекция № 4), в то время как в первом случае мы имеем дело лишь с динамической полугруппой преобразований.

Многочисленные практические приложения типа задачи Бенара   
рассматриваются Ф. Муном [95], Г. Николисом и И. Р. Пригожиным [98],   
Г. Хакеном [138]. Эти вопросы связаны с неравновесной термодинамикой   
(см. И. Р. Пригожин [109], Р. Хаазе [136]).

Вопросы корректности задач математической физики, а также методы регуляризации некорректных задач описывается Р. Латтесом и Ж. -Л. Лионсом [66] и А. Н. Тихоновым и Н. Я. Арсениным [128]. К числу некорректных   
относятся большинство задач оптимального управления, а также обратных задач математической физики (см. также лекция № 14).

# Лекция № 17 УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Господь Бог изощрен,  
но не злонамерен.

Альберт ЭЙНШТЕЙН

В основе математического аппарата квантовой механики лежит удивительное уравнение Шредингера. Оно представляет собой специфическое уравнение в частных производных относительно некоторой комплекснозначной величины, называемой волновой функцией. Эта характеристика позволяет, в частности, оценить вероятность нахождения рассматриваемой квантово-  
механической частицы в той или иной области.

Ниже устанавливается уравнение Шредингера для свободной частицы и для частицы, движущейся во внешнем поле. Исследуется задача о прохождении потенциального барьера. Показывается, что в отличие от классического случая квантово-механическая частица способна преодолеть даже достаточно высокий потенциальный барьер.

## 1. ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Задачи квантовой механики вводят нас в удивительный мир, где привычные законы природы в значительной степени оказываются не пригодными, где на каждом шагу нас подстерегают неожиданности, вступающие в явные противоречия с нашим устоявшемся жизненным опытом и здравым смыслом. Действительно, оказывается, что в силу каких-то непонятных причин мы не сможем в принципе сколь угодно точно определить одновременно координату и импульс исследуемого объекта. Любая частица почему-то неизменно обладает волновыми свойствами. Как это не странно, электрон может находиться лишь на некоторых заранее фиксированных орбитах вокруг ядра.

Всё это, на первый взгляд, представляется совершенно нелепым и вызывает сильный внутренний протест. Складывается впечатление, что в действительности мы сталкиваемся лишь с временными неприятностями, вызванными несовершенством наших знаний, что по мере накопления информации эти парадоксальные утверждения найдут   
рациональное объяснение, а в микромире воцарится долгожданный   
порядок...

Однако приходится всё-таки смириться с мыслью о том, что наши знания и опыт нуждаются в радикальной коррекции при обращении к процессам микромира. Там действуют иные законы, которые, несмотря на свою кажущуюся парадоксальность, отличаются не меньшей строгостью, чем привычные постулаты нашего мира. А это непременно означает, что наверняка должен существовать специальный математический аппарат, позволяющий описывать удивительнейшие явления квантовой физики.

В классической физике принято считать, что любая характеристика системы может быть измерена с любой степенью точности.   
Конечно, в каждом конкретном эксперименте всегда допускается определенная погрешность измерения. Но по мере совершенствования измерительной аппаратуры при поддержке высокой чистоты эксперимента эту погрешность, в принципе, можно неограниченно уменьшать. В то же время в результате анализа процессов микромира было установлено, что имеется принципиальный предел точности измерения физических величин. Количественно он характеризуется *соотношением неопределенности Гейзенберга*

Δ*х* Δ*р* ≥ /2 ,

где Δ*х* и Δ*р* – погрешности определения координаты и импульса   
частицы, а **** – универсальная физическая константа, называемая   
*постоянной Планка*.

Отметим, что соотношение неопределенностей не накладывает принципиальных ограничений на предел точности измерения координаты или импульса по отдельности. Однако одновременное нахождение этих величин с произвольной степенью точности невозможно в принципе. Вследствие существенной малости постоянной Планка в классической физике соотношение неопределенностей не проявляется. Но при описании процессов микромира пренебрегать этим ограничением уже нет никакой возможности.

Соотношение неопределенностей в определенной степени   
связано с особенностью постановки эксперимента в микромире.   
Действительно, любое измерение представляет собой взаимодействие объекта исследования с измерительной аппаратурой. Естественно, всякое измерение вносит определенные возмущения в систему. Для задач классической физики они обычно достаточно мало по сравнению с абсолютными значениями характеристик процесса. Однако в микромире ситуация существенно меняется. Чем большей точности мы   
хотим добиться в процессе измерения, тем большие возмущения мы   
вынуждены вносить в изучаемый процесс. В частности, при высочайшей точности измерения положения частицы мы возмущаем систему настолько, что ее импульс существенным образом изменится. Если же мы попытаемся достаточно точно измерить импульс, то в процессе его непосредственного измерения частица изменит свое положение в пространстве. Еще раз подчеркнем, что дело здесь не в разрешающей способности измерительной аппаратуры или в нашем неумении поддержать высокую чистоту эксперимента. Возникающие трудности носят не субъективный, а объективный характер.

Соотношение неопределенностей фактически устанавливает предел применимости таких понятий классической физики, как положение и импульс частицы. Таким образом, осложнения возникают не в самом микромире, а при попытке восприятия его нами, живущими по совершенно иным законам. Навязывая микромиру привычные нам и явно не свойственные ему понятия координаты, импульса, траектории и т.д., мы вынуждены сполна расплачиваться за эти явно сомнительные действия. Законы квантовой физики никак не менее строги, чем привычные нам старые добрые классические законы. Удивляться здесь следует не им, а нашей милой наивности, когда мы почему-то решили, что известные нам правила игры остаются в силе всегда и везде. Но, коль скоро законы квантовой физики носят объективный характер, непременно должны существовать какие-то математические соотношения, описывающие эти законы, а значит, обладающие весьма странными, на наш взгляд, свойствами.

## 2. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ

Проявлением соотношения неопределенностей является один из основополагающих принципов квантовой механики – *корпускулярно-волновой дуализм*. Коль скоро мы оказались не в состоянии локализовать квантово-механическую частицу в пространстве, мы уже никак не сможем воспринимать ее как материальную точку. Исследуемая частица теперь уже будет некоторым размытым объектом, не имеющим четко выраженных границ. В каком-то смысле она напоминает волну, которая также является объектом с не очень точно обозначенными размерами.

В квантовой физике принято считать, что любая частица обладает определенными волновыми свойствами. Математически эти свойства могут быть описаны с помощью некоторой загадочной комплекснозначной величины ψ, называемой *волновой функцией*, зависящей от времени *t*и вектора координат  частицы. Физический смысл волновой функции состоит в следующем. Вероятность нахождения частицы в момент времени *t* в сколь угодно малом объеме



пропорциональна величине

.

Таким образом, вероятность нахождения частицы, характеризуемой волновой функцией ψ в момент времени *t* в некоторой пространственной области Ω оказывается пропорциональной интегралу



В теории вероятностей характеристику, определяющую вероятность того, что некоторая случайная величина принимает значения из сколь угодно малого элемента объема, называют *плотностью вероятности*. Итак, плотность вероятности расположения частицы в той или иной области пропорциональна квадрату модуля волновой функции.

Отметим ещё одно крайне любопытное свойство волновой функции. Пусть задана некоторая волновая функция ψ. Определим функцию ϕ в соответствии с равенством

 ,

где **i** – мнимая единица, θ – произвольное действительное число.   
Учитывая формулу

exp(**i**θ) = cos θ + **i** sin θ ,

установим равенство



Как уже говорилось ранее, физический смысл имеет не сама волновая функция, а лишь квадрат ее модуля. Следовательно, плотности вероятности, соответствующие волновым функциям ψ и ϕ,характеризуют одно и то же состояние квантово-механической системы. Таким образом, две волновые функции, различающиеся комплексным множителем, равным по модулю единице, соответствует одному и тому же состоянию частицы. Тем самым оказывается, что состояние частицы определяет волновую функцию с точностью до упомянутого множителя, что является одним из явных проявлений экзотических свойств математического аппарата квантовой механики.

Волну, характеризуемую волновой функцией, называют *волной де Бройля* или *волной вероятности*. Согласно идеологии корпускулярно-волнового дуализма частица и ее волна де Бройля фактически представляет собой один и тот же объект.

Ниже будет установлено уравнение, решением которого оказывается волновая функция.

## 3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

По своей природе волновая функция как будто должна быть   
периодической по каждому аргументу. Для простоты будем искать ее в следующем виде

 , (17.1)

где ψ*j* – периодическая функция соответствующего аргумента.   
Простейшими примерами периодических функций являются синус и косинус. Однако более удобной здесь оказывается связанная с тригонометрическими функциями экспонента с мнимым показателем. Это объясняется тем, что мы решили искать функцию ψв форме (17.1). Произведение экспонент вновь дает экспоненту, что позволяет упростить дальнейшие выкладки. Синус и косинус подобным свойством явно не обладают. Таким образом, функцию ψ*j* было бы неплохо   
искать в виде

ψ*j*(*y*) = exp (**i** *kj y*) ,

где *kj* – некоторые действительные числа, *j* **=** 0, 1, 2, 3. То обстоятельство, что получаемая в результате функция ψоказывается комплекснозначной не должно нас особо смущать. Вспомним, что физический смысл имеет не сама волновая функция, а лишь квадрат ее модуля, т.е. действительное значение. При сделанных предположениях формула (17.1) принимает вид



Введем обозначения



Тогда волновая функция будет определена по формуле

 (17.2)

где – скалярное произведение соответствующих векторов. Входящие в равенство (17.2) вектор  и число ω называют *волновым вектором* и *частотой* функции ψ.

В квантовой механике утверждается, что частота ω пропорциональна полной энергии *Е* движущейся частицы, а волновой вектор  – ее импульсу, причем соответствующими коэффициентами в обоих случаях оказывается постоянная Планка:

 .

В этих условиях формула (17.2) принимает вид

 . (17.3)

Энергия частицы, движущейся в отсутствии каких-либo внешних сил, складывается из ее энергии покоя *Е*0 и кинетической энергии *К*. Согласно формуле Эйнштейна энергия покоя равна

*Е*0 = *m c 2*,

где *m* – масса покоя частицы, а *с* – скорость света в вакууме. Кинетическая энергия определяется по формуле

,

где  – скорость движения частицы. Таким образом, её полная энергия равна

.

В результате из равенства (17.3) получаем



В правой части этого выражения второй сомножитель зависит от состояния частицы, т.е. от ее положения и импульса. Первый же сомножитель не зависит от состояния и является комплекснозначной функцией, равной по модулю единице. Как отмечалось ранее, эта величина не оказывает никакого влияния на состояние системы. Следовательно, в качестве волновой функции мы имеем законное право выбрать лишь второй сомножитель. Тем самым приходим к равенству

. (17.4)

Попытаемся теперь подобрать достаточно простое уравнение, решением которого будет определенная выше функция ψ. Найдем производную

. (17.5)

Аналогичным образом определяются производные по пространственным переменным



где *pj* – *j*-ая компонента вектора. Вычисляя вторую производную и суммируя по *j* с учетом определения оператора Лапласа Δ, будем иметь

. (17.6)

Сравнивая соотношения (17.5), (17.6), получаем равенство

 . (17.7)

Итак, волновая функция, определяемая по формуле (17.4), удовлетворяет уравнению в частных производных (17.7), называемому *уравнением Шредингера* для свободной частицы (частицы, движущейся в отсутствии внешних сил). Равенство (17.7) можно было бы упростить, сократив его на постоянную Планка. Однако для дальнейших исследований удобнее сохранить его в приведенной выше форме. Отметим, что, в отличие от всех рассмотренных ранее математических моделей, мы имеем дело с комплекснозначной функцией состояния ψ. Это обстоятельство, тем не менее, не будет серьезной помехой при дальнейшем исследовании.

Уравнение Шредингера было выведено, исходя из совершенно формальных математических рассуждений. Но, как это ни удивительно, оно действительно имеет прекрасный физический смысл и многочисленные приложения. Впрочем, стремление к простоте, использованное нами в предшествующих выкладках, великолепно согласуется с общими принципами моделирования явлений природы (см. лекцию № 1).

## 4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Соотношение (17.7) описывает движение свободной квантово-механической частицы. Обратимся теперь к рассмотрению поведения частицы во внешнем поле, характеризуемом потенциальной энергией *U*. В этом случае энергия системы будет уже иметь вид

 .

Отсутствие в последнем выражении внутренней энергии объясняется тем обстоятельством, что, как это было установлено выше, она не оказывает влияния на квадрат модуля волновой функции.

Подставляя значение энергии в равенство (17.3), находим   
значение волновой функции

 .

В результате дифференцирования этого равенства определяем

 , .

Таким образом, справедливо соотношение

 . (17.8)

Оно называется *уравнением Шредингера* для частицы во внешнем поле и при *U* = 0 совпадает с соответствующим уравнением для свободной частицы. Соотношение (17.8) получено в предположении постоянства потенциальной энергии. Однако есть серьезные основания полагать, что уравнение Шредингера (17.8) остается в силе и в том случае, когда величина *U* зависит от координаты частицы.

В основе получения уравнения Шредингера лежали чисто формальные математические рассуждения. Однако с его помощью могут быть установлены некоторые физические эффекты, реально существующие в природе и принципиально не предсказуемые с помощью классической механики. Одним из таковых является прохождение   
частицей потенциального барьера.

## 5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

Рассмотрим задачу о прохождении частицей потенциального барьера (см. рис. 79). В классической механике частица либо преодолевает барьер, если ее энергия достаточно велика, либо отражается от него, если энергия частицы меньше глубины потенциального барьера. Исследуем этот процесс с точки зрения квантовой механики.



Рис. 79. При малой кинетической энергии классическая частица   
не пройдет потенциальный барьер, а при большой пройдет.



Рис. 80. Потенциальный барьер.

Предположим, что частица движется в направлении оси *х*,   
причем в точке *х* = 0 находится потенциальный барьер, т.е. потенциальная энергия при переходе через эту точку меняется скачком с нуля до некоторой постоянной положительной величины *V*. Уравнение Шредингера в одномерном случае записывается следующим образом:

 . (17.9)

Здесь функция *U* полагается равной нулю при *х* < 0 и принимает значение *V* при *х* > 0 (см. рис. 80). Если величина барьера *V* превышает энергию *Е* движущейся в сторону барьера частицы, то согласно законам классической механики частица может находиться в области   
*х* < 0 , но никак не попадет в область *x* > 0 . В частности, двигаясь внутри разрешенной области и наталкивать на потенциальный барьер, частица отражается от него и продолжает движение в обратном   
направлении.

Исследуем уравнение Шредингера (17.9) при указанном соотношении между параметрами процесса. Решение данного уравнения будем искать в виде

 ,

где ϕ – некоторая неизвестная функция. Выбор именно такого представления волновой функции объясняется установленным ранее характером ее зависимости от времени. В результате подстановки указанной функции ψ в равенство (17.9) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

. (17.10)

Функции ϕ и ψ различаются лишь экспонентой, которая, как уже   
известно, не влияет на значение квадрата модуля, а значит, и на состояние системы. Таким образом, величину ϕ можно смело считать волновой функцией рассматриваемой частицы.

При *x* < 0 уравнение (17.10) принимает вид

 .

Его общее решение определяется по формуле

ϕ-(*x*) = *a* exp(**i** *kx*) + *b* exp(-**i** *kx*) , (17.11)

где *a*, *b* – произвольные постоянные, .

При *x* > 0 уравнение (17.10) приводится к виду



и имеет общее решение

ϕ+(*x*) = *с*1 exp(-*qx*) + *c*2 exp(*qx*) , (17.12)

где *c*1 , *c*2 – произвольные постоянные,  .

Установим значения констант, входящие в соотношения (17.11), (17.12). Отметим, что второе слагаемое в правой части последнего   
равенства, а значит, и квадрат модуля функции ϕ экспоненциально   
возрастает с ростом координаты *х*. Тогда вероятность обнаружения   
частицы вдали от потенциального барьера неограниченно возрастает   
(а значит, неминуемо превысит единицу, что уж совсем неприлично для величины, имеющей смысл вероятности). Во избежание этой заведомо абсурдной ситуации полагаем *c*2 = 0 .

Значения других констант в равенствах (17.11), (17.12) найдем из условия непрерывности функции ϕ и ее производной в точке *х* = 0 . Полагаем

ϕ-(0) = ϕ+(0) ,  ,

где через ϕ- и ϕ+ обозначены пределы слева и справа соответствующей функции в данной точке. Тогда справедливы соотношения

.

Отсюда находим значения

.

Остается еще не определенной константа *c*1 . Однако уравнение (17.10) линейно и однородно, а значит, умножая его решение на константу, мы вновь получаем решение того же уравнения. Определив величину *c*1 = *а* –1 , установим соотношение

ϕ(*x*) = exp(**i** *kx*) + *А* exp(-**i** *kx*) , *x* < 0 , (17.13)

где

 .

Аналогично находим функцию

ϕ(*x*) = *В* exp(-*qx*) , *x* > 0 , (17.14)

где

.

Функция ϕ, определяемая равенством (17.13), представляет собой суперпозицию двух волн. Первое слагаемое exp(**i** *kx*) соответствует волне, распространяющейся вправо (в сторону барьера), а второе слагаемое, пропорциональное exp(-**i** *kx*) – волне, движущейся влево (от барьера). Учитывая равенство | *A* | = 1 , установим, что амплитуды этих волн совпадают. Именно это обстоятельство оправдывает сделанный выбор параметра *c*1 .

Итак, волновая функция при *х* < 0 представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волны (см. рис. 81). Этот результат хорошо согласуется с предсказанием классической механики, согласно которому частица наталкивается на потенциальный барьер и отражается от него.



Рис. 81. Квадрат модуля решения уравнения (17.10).



Рис. 82. Квадрат модуля решения уравнения (17.10)  
для бесконечного барьера или при .

Решающее отличие квантово-механической частицы от классической наблюдается в области *x* > 0 , запрещенной законами классической механики. Как видно из формулы (17.14), частица с определенной вероятностью проходит потенциальный барьер и оказывается в некоторой его окрестности в запрещенной (с классической точки зрения) зоне. Характерно, что функция ϕ быстро (экспоненциально) убывает до нуля. Таким образом, вероятность нахождения квантово-механической частицы в глубине рассматриваемой зоны практически равно нулю, т.е. частица никак не может там оказаться.

Итак, волна де Бройля, встречая потенциальный барьер, частично отражается, частично проникает сквозь него. Прохождение частицы со сравнительно малой энергией через достаточно высокий потенциальный барьер действительно наблюдается на практике. Это явление, называемое *туннельным эффектом*, не вписывается в законы классической механики и свидетельствует о достаточно высокой эффективности уравнения Шредингера.

Предположим теперь, что потенциальный барьер не ограничен, т.е. величина *V* сколь угодно велика. Переходя к пределу в равенствах (17.13), (17.14) при *V* → ∞, находим значения

ϕ(*x*) = exp(**i** *kx*) + exp(-**i** *kx*) при *x* < 0 , ϕ(*x*) = 0 при *x* > 0 .

Полученные результаты говорят о том, что даже квантово-механическая частица не в состоянии преодолеть бесконечный потенциальный барьер (см. рис. 82). Ее свойства уже никак не отличаются от свойств заурядной классической частицы, т.е. волна де Бройля полностью отражается от барьера. Чем больше высота потенциального барьера, тем меньше вероятность прохода частицы сквозь него. Аналогичный результат получается для конечного барьера в том случае,   
когда постоянная Планка стремится к нулю. Этот факт является   
проявлением того обстоятельства, что квантовая механика переходит в классическую при переходе к пределу  .

Можно оценить вероятность прохождения частицей потенциального барьера. Она пропорциональна интегралу

.

Учитывая значение параметра *р*, находим величину

 .

Отсюда следует, что вероятность прохождения частицей потенциального барьера возрастает с ростом энергии частицы *Е*, а также с уменьшением глубины барьера *V*, массы частицы *m* и разности энергий *V*–*E* . Это значение, в принципе, достаточно мало в силу существенной   
малости постоянной Планка. Полученные результаты достаточно убедительно показывают, что в макромире можно смело пользоваться   
законами классической механики.

#### **Компьютерное сопровождение. Уравнение Шредингера.**

С помощью обучающего программного комплекса "*Квантовая механика*" Рассмотреть задачу о прохождении квантово-механической частицей   
потенциального барьера. Проделать следующую работу:

1. Убедиться в том, что частица, обладающая сравнительно низкой   
энергией, может преодолеть барьер.

2. Оценить влияние параметров задачи на поведение частицы.

3. Сравнить поведение квантово-механической и классической частицы.

## КОММЕНТАРИИ

Систематическое изложение квантовой механики дается, например, в книгах Э. Вихмана [18], А. С. Давыдова [29], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [59], А. Мессиа [88]. Более глубоко математический аппарат квантовой механики излагается Дж. Макки [73].

Все рассмотренные ранее математические модели были выведены из каких-либо законов сохранения или вариационных принципов. Формальность вывода уравнения Шредингера объясняется тем, что оно непосредственно описывает фундаментальные свойства окружающего мира, а потому не может быть следствием каких-либо других законов природы.

Понятие вероятности отвечает всем требованиям, предъявляемым   
к мерам (см. П. Халмош [139]. Она является функционалом (аргументом ее   
будет случайное событие, а значениями – числа), всегда неотрицательна и аддитивна в том смысле, что вероятность появления хотя бы одного их двух независимых событий равна сумме вероятностей этих событий. Как и всякая мера, вероятность связана с интегрированием. В частности, вероятность нахождения частицы в некотором объеме равна интегралу по этой области от квадрата модуля волновой функции. Систематическое изложение теории вероятностей осуществляется, например, в книгах Ю. В. Прохорова, Ю. А. Розанова [112], и В. Феллера [134].

Предположим, что частица на прямой с волновой функцией ψ = ψ(*x*,*t*) в некоторый момент времени *t* находится непосредственно в точке *х*0. Тогда, исходя из физического смысл волновой функции для любого сколь угодно малого числа > 0 справедливы равенства

 .

Согласно первому из них функция ψ равна нулю вне интервала (*х*0 –*х*0 + а из второго равенства и теоремы о среднем следует, что она принимает значение  в некоторой точке этого интервала. Отмечая произвольную малость , заключаем, что никакая обычная функция не может обладать указанными свойствами. Это обстоятельство является проявлением невозможности локализации квантово-механической частицы в пространстве.

Предположим, что частица на прямой имеет конкретный импульс *р*. Тогда, пользуясь равенством (17.4) в одномерном случае, находим

.

Интеграл слева должен равняться единице (частица находится хоть где-нибудь). Однако интеграл справа не ограничен. Это противоречие говорит о принципиальной невозможности точного определения и импульса частицы.

С отсутствием детерминированности процессов мы сталкивались и в предшествующей лекции. Однако в данном случае природа явления совершенна иная. В задачах Эйлера или Бенара мы имели дело с нелинейными уравнениями, допускающими неединственное решение. В данном случае мы исследуем линейное уравнение Шредингера, которое само по себе допускает вполне определенное решение. Неопределенность возникает не в самом исследуемом процессе, а при попытке интерпретировать его с помощью классических понятий типа координаты или импульса частицы. Таким образом, вероятностные эффекты появляются не в самом микромире, а в процессе взаимодействия его с объектами макромира.

То обстоятельство, что волновая функция, определяемая по формуле (17.4), не зависит от скорости света, хотя эта величина присутствовала в предшествующих выкладках, имеет принципиальное значение. Это обстоятельство подчеркивает, что квантовая механика является нерелятивистской теорией. Одновременный учет квантово-механических и релятивистских эффектов   
связан с существенными трудностями (см., например, В. Б. Берестецкий,   
Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский [11]).

Формально уравнение Шредингера (17.7) с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением теплопроводности. Однако наличие в нем мнимой единицы принципиально меняет его свойства. В частности, уравнение   
характеризует волновые эффекты, а не стремление системы к равновесию.   
В отличие от уравнения теплопроводности уравнение Шредингера обратимо во времени, т.е. по данному значению волновой функции можно восстановить предысторию системы. Тем самым рассматриваемое уравнение значительно ближе к уравнению колебания струны, чем теплопроводности.

В квантовой механике имеет смысл лишь средние значения или   
математические ожидания различных характеристик. В частности, если *F* есть некоторая характеристика объекта с волновой функцией ψ = ψ(*x*,*t*) , то его средняя величина равна



где ψ\* – величина, комплексно сопряженная к ψ. Отметим, что средние величины удовлетворяют соотношениям, аналогичным уравнению движения



где *x*, *p*, *U* – координата, импульс и потенциальная энергия. При  эти равенства преобразуются в классические уравнения

 .

В частности, переходя к пределу в равенстве (17.14) при , установим, что ϕ(*x*) = 0 , т.е. частица не проникает в запрещенную зону (см. рис. 82).   
Эти свойства говорят о том, что классическая механика является предельным случаем квантовой механики при стремлении к нулю постоянной Планка.

Можно усмотреть аналогию между движением сквозь барьер квантово-механической частицы и потока классических частиц. В частности, при движении большего количества молекул со сравнительно малой средней энергией может оказаться, что какая-то часть молекул, имеющих большую скорость, может преодолеть барьер, хотя большая часть отразится от него. В рассматриваемой же задаче барьер проходит единственная частица с малой энергией.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в   
   области математики. – М., Сов. Радио, 1970.
2. Алексеев В. И., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – М., Наука, 1979.
3. Алифанов О. М., Артюхин О. М., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М., Наука, 1988.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М., Наука, 1959.
5. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1975.
6. Ашманов А. С. Математические модели и методы в экономике. – М., МГУ, 1980.
7. Батунер Л. М., Позин М. Е. Математические методы в химической кинетике. – Л., ГИТ и ХЛ. – 1963.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. – М., Наука, 1973.
9. Беллман Р. Математические проблемы в биологии. – М., Мир, 1996.
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.1. – М., Наука, 1966.
11. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевсий Л. П. Квантовая   
    электродинамика. – М., Наука, 1989.
12. Биркгофф Г. Математика и психология. – М., Сов. Радио, 1977.
13. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. – М., ИЛ, 1950.
14. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М., ИЛ, 1963.
15. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. – М., Наука, 1972.
16. Вейль Г. Математическое мышление. – М., Наука, 1989.
17. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и   
    машине. – М., Сов. Радио, 1968.
18. Вихман Э. Квантовая физика. – М., Наука, 1977.
19. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1971.
20. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М., Наука, 1976.
21. Вопросы математического моделирования и структурных исследований психической деятельности. – Владимир, 1972.
22. Гейзенберг В. Физика и философия. – М., ИЛ, 1963.
23. Гейзенберг В. Смысл и значение красоты в точных науках. – Вопросы философии, 1979, № 12, с. 49 – 60.
24. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. – М., ИЛ, 1961.
25. Гнеденко Б. В. Математика и научное познание. – М., Наука, 1983.
26. Гроп Д. Методы идентификации систем. М., Мир, 1979.
27. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Часть 1. – М., Мир, 1990.
28. Гусейнова А. С., Павловский Ю. Н., Устинов В. А. Опыт имитационного моделирования исторического процесса. – М., 1984.
29. Давыдов А.С. Квантовая механика. – М., Наука, 1963.
30. Дайсон Ф. Дж. Упущенные возможности // Успехи математических наук, 1980, вып. 1, с. 171 – 192.
31. Данилина Е. В. Модели и методы оценки антропогенных систем. – Новосибирск, Наука, 1986.
32. Динамическая теория биологических систем. Под ред. Р. А. Полуэктова. – М., Наука, 1974.
33. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. –М., Наука, 1982.
34. Журавлев Г. Е. Системные проблемы развития математической психологии. – М., Наука, 1983.
35. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М., Мир, 1976.
36. Замков О. О., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В. Математические методы в экономике. – М., Дело и сервис, 1999.
37. Иванилов Ю., Лотов А. Математические модели в экономике. – М., МГУ, 1980.
38. Иванов Ю. П. Модель соревнования двух стран // Техническая кибернетика, 1969, №1.
39. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Методы решения экстремальных задач. – М., Наука, 1974.
40. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М., Мир, 1983.
41. Калашников С. Г. Электричество. – М., Наука, 1977.
42. Каракозова Э. В. Моделирование в общественных науках. – М., 1986.
43. Кикоин И. К., Кикоин А. К. Молекулярная физика. М., Наука, 1976.
44. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. – М., Наука, 1971.
45. Клайн М. Математика. Поиск истины. – М., Мир, 1988.
46. Клайн М. Математика. Утрата определенности. – М., Мир, 1984.
47. Ковальченко И. Д. Методы исторического исследования. – М., 1987.
48. Компьютерные технологии в образовании. Под ред. Ш. Смагулова. Алматы, ²àçàº óíèâåðñèòåòi, 1999.
49. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., ИЛ, 1958.
50. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М., Мир, 1969.
51. Котова А. Б. Математические проблемы в биологии. – Киев, ВШ, 1982.
52. Крауфорд Ф. Волны. – М., Наука, 1971.
53. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М., Наука, 1967.
54. Круг идей: развитие исторической информатики. – М., 1995.
55. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении. – М., Наука, 1977.
56. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. – М., Л., Наука, 1950.
57. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М., 1970.
58. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М., Наука, 1988.
59. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. – М., Наука, 1974.
60. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М., Наука, 1973.
61. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. – М., Наука, 1976.
62. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М., Наука, 1973.
63. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М., Наука, 1959.
64. Ланкастер К. Математическая экономика. – М., Сов. Радио, 1972.
65. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М., 1965.
66. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., Мир, 1972.
67. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1961.
68. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., Мир, 1972.
69. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. – М., Наука, 1987.
70. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М., Наука, 1978.
71. Лоуден С. Оптимальные траектории для космической навигации. – М., Мир, 1966.
72. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрыв в газах. – М., Мир, 1968.
73. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. – М., Мир, 1965.
74. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М., Наука, 1972.
75. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. – М., Мир, 1983.
76. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. - М., Наука, 1978.
77. Марчук Г. Е. Математическое моделирование в проблемах окружающей среды. – М.: Наука, 1982.
78. Математика в современном мире. – М., Мир, 1967.
79. Математика в социологии. – М., Мир, 1977.
80. Математики о математике. – М., Знание, 1972.
81. Математическая психология. Методология, теория, модели. – М., Наука, 1985.
82. Математические методы в исследованиях социально-экономической истории. М., Наука, 1975.
83. Математические методы в исторических исследованиях. М., Наука, 1972.
84. Математические методы в социально-экономической истории. – М., Наука, 1975.
85. Математические модели биологических систем. – М., Наука, 1971.
86. Математические модели в биологии и медицине. – Вильнюс, 1985, вып. 1.
87. Математические модели исторических процессов. – М., МГУ, 1996.
88. Мессиа А. Квантовая механика. В двух томах. – М., Наука, 1978-79.
89. Миеле А. Механика полета. Т. 1. – М., 1965.
90. Михин Н. М. Внешнее трение твердых тел. – М., Наука, 1977.
91. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. – М., ВШ, 1977.
92. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент. – М., Наука, 1979.
93. Моисеев Н. Н. Простейшие математические модели экономическо-го прогнозирования. – М., Знание, 1975.
94. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М., Наука, 1971.
95. Мун Ф. Хаотические колебания. М., Мир, 1990.
96. Наймарк Ю. И. Простые математические модели и их роль в постижении мира // Соросовский образовательный журнал, 1997,   
    № 3, с. 139 – 143.
97. Нейман Дж. фон. Математические основы квантовой механики. – М., Наука, 1964.
98. Николис Г., Пригожин И. Р. Познание сложного. – М., Мир, 1990.
99. Никольский С. М. Квадратурные формулы. – М., Наука, 1974.
100. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М., Наука, 1971.
101. Пейн Г. Физика колебаний и волн. – М., Мир, 1979.
102. Пененко В. В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач окружающей среды. – Новосибирск: Наука, 1985.
103. Петросян Л. А., Захаров В. В. Введение в математическую экологию. – Л., ЛГУ, 1986.
104. Плотинский Ю. М. Математическое моделирование динамики социальных явлений. – М., МГУ, 1992.
105. Пирс Дж. Почти всё о волнах. – М., Мир, 1976.
106. Полак Э. Численные методы оптимизации. – М., Мир, 1974.
107. Политология. Под ред. М. Н. Марченко. – М., Зерцало, 1997.
108. Полуэктов Р. А., Пэх Ю. А., Швытов И. А. Динамические модели экологических систем. – Л., Гидрометеоиздат, 1980.
109. Пригожин И. Р. Введение в термодинамику неравновесных процессов. – М., ИЛ, 1960.
110. Прикладная математика. Под ред. Э. Биккенбаха. – М., Мир, 1968.
111. Прикладная экономика. – М., Просвещение, 1993.
112. Прохоров Ю. В., Розанов Э. А. Теория вероятностей. – М., Наука, 1967.
113. Пуанкаре А. О науке. – М., Наука, 1983.
114. Рассел Б. История западной философии. В двух томах. – Н., НГУ, 1994.
115. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М., Наука, 1978.
116. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. – М., Наука, 1975.
117. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – М., Наука, 1977.
118. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М., Наука, 1977.
119. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М., Мир, 1973.
120. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В двух томах. – М., Наука, 1976.
121. Серовайский С. Я. Архитектура математики. В двух томах. –   
     Алматы, 21 век, 1998.
122. Серовайский С. Я., Лысковская Н. А., Попова Н. В. Математические и компьютерные модели в экологии. Динамика популяций. –   
     Алматы, ²àçàº óíèâåðñèòåòi, 1999.
123. Смит Дж. М. Математические модели в биологии. – М., Мир, 1976.
124. Смит Дж. М. Модели в экологии. – М., Мир, 1970.
125. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. – М., Мир, 1979.
126. Стюарт К. Концепции современной математики. – Минск, ВШ, 1980.
127. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М., Наука, 1976.
128. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных   
     задач. – М., Наука, 1974.
129. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М., Наука, 1978.
130. Уильямсон М. Анализ биологических популяций. – М., Мир, 1975.
131. Устинов В. А., Фелингер А. Ф. Историко-социальные исследования. ЭВМ и математика. – М., Мысль, 1973.
132. Фарлоу С. Уравнения с частными производными. – М., Мир, 1985.
133. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М., Наука, 1978.
134. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В двух томах. – М., Наука, 1984.
135. Форрестер Дж. Мировая динамика. – М., Наука, 1978.
136. Хаазе Р. Термодинамика неравновесных процессов. – М., 1967.
137. Хайкин С. Э. Физические основы механики. – М., Наука, 1971.
138. Хакен Г. Синергетика. – М., Мир, 1980.
139. Халмош П. Р. Теория меры. – М., ИЛ, 1953.
140. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Мир, 1970.
141. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М., Мир, 1983.
142. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., Мир, 1985.
143. Хир К. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. – М., Мир, 1976.
144. Хитрин Л. Н. Физика горения и взрыва. – М., МГУ, 1957.
145. Хуанг К. Статистическая механика. – М., Мир, 1966.
146. Швитра Д. И. Динамика физиологических систем. – Вильнюс, Мокслас, 1989. – 169 с.
147. Шпенглер О. Закат Европы. Т. 1. – Минск, Попурри, 1998.
148. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. М., Мир, 1974.
149. Эберт К., Эберер Х. Компьютеры. Применение в химии. – М., Мир, 1988.
150. Экланд И. Методы математической экономики. – М., Мир, 1983.
151. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., Наука, 1969.
152. Эмануэль Н. М., Кнорре Д. Г. Курс химической кинетики. – М., ВШ, 1984.
153. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М., Наука, 1979.
154. Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. – М., Сов. радио, 1980.
155. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М., Мир, 1974.
156. Cameny J., Snell J. Mathematical Models in social Sciences. – Boston, 1962.
157. Hanneman R., Holllingsworth J. R. Modeling and Simulation in Historical Inquiry // Historical Methods. Summer 1984, vol. 17, no. 3.
158. Hanneman R. Computer-assisted theory building. Modeling dynamic social systems. – N.Y., SAGE, 1988.
159. Huckfeldt R. et all. Dynamic Modelling: An Introduction. Beverley Hills. – 1982.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

*Милый друг, иль ты не видишь,*

*Что всё видимое нами*

*Только тени, только отблеск*

*От незримого очами.*

Владимир Соловьев

Наш курс подошел к концу. Он не отличался особой глубиной, а за его пределами осталось великое множество явлений, для которых можно и должно применять аппарат математического моделирования. Возможно, у Читателя возникнет необходимость построить свою модель какого-либо процесса. И я буду очень рад, если знакомство с нашим курсом хоть немного ему поможет. Я бы лишь посоветовал Читателю следовать совету средневекового мыслителя Уильяма Оккама: "*не умножайте сущностей*". Не надейтесь, что качество модели определяется исключительно количеством учитываемых эффектов…

Более двух с половиной тысяч лет отделяет нас от того времени, когда Пифагор возвестил о существовании реального мира, воспринимаемого органами чувств, и идеального мира человеческих идей. И на стыке этих двух грандиозных миров лежит число – поразительное идеальное понятие, посредством которого можно постигнуть гармонию окружающей нас реальности. Так у самых истоков философии и науки зародилось математическое моделирование.

Сущность моделирования хорошо отражают две старинные притчи. В одной из них, принадлежащей Платону, рассказывается о глубокой пещере, перед входом в которую зажжен костер. Если между костром и пещерой что-то происходит, то на стенах пещеры появляются смутные тени. Для людей внутри пещеры, они служат единственной информацией о происходящих событиях… В другой притче рассказывается о слепых, повстречавших слона. Постигая мир с помощью осязания, один из них натолкнулся на хвост слона, другой – на бивень, третий – на ногу. В результате у каждого из них сложилось свое представление о слоне. Эти туманные представления подобно теням на стене пещеры Платона являются моделями исследуемых объектов.

К математическому моделированию следует относиться с тех же позиций. Кому-то подобная ситуация может показаться неутешительной. Однако опыт последних тысячелетий свидетельствует о противоположном. Как говорил знаменитый английский историк Арнольд Тойнби "*мы знаем*, *что наше понимание его* (мира, С.С.) *всегда будет лишь проблеском*, *но это нас не расхолаживает*, *и мы продолжаем этот бесконечный поиск*"…